2 標本の正規分布モデルにおける平均と分散の同時相違検出のための統計的検定法

2015SS031 風岡攻希　2015SS044 長野弘晃
指導教員：白石高章

1　はじめに

様々なデータにおいては，平均が異なれば分散が異なる場合が多い．しかし，多くの文献で述べられている統計的検定法では，平均か分散のどちらか一方のみを検出するものが多い．そこで本論文では，各標本の平均と分散が未知である 2 標本の正規分布モデルにおける平均と分散を同時検出するための統計的検定法を考察する．また考察した検定法の優劣を検出力を用いて述べていく．

2　モデルの設定

$(X_1,\cdots,X_{n_1}),(Y_1\cdots,Y_{n_2})$ をある 2 つの母集団からのそれぞれ大きさが n_1,n_2 の無作為標本とする. また，分布関数はそれぞれ $P(X_i \leqq x) = \Phi((x-\mu_1)/\sigma_1), P(Y_j \leqq x) = \Phi((x-\mu_2)/\sigma_2)$ である. ただし，$\Phi(x)$ は標準正規分布の分布関数である．すなわち，各 X_i, Y_j は $X_i \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y_j \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ である．また，これらは互いに独立であるとする．また分散の一様最小不偏推定量は,

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2,$$

$$\tilde{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\bar{Y})^2$$

で与えられる．ただし,

$$\bar{X} \equiv \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i, \quad \bar{Y} \equiv \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j$$

とする．また, 平均と分散の同時検出を行うために未知パラメータの集合は

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \ (\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$$

を設定する. 次に $\boldsymbol{\theta}$ の範囲を表す集合として,

$$\boldsymbol{\Theta}_0 \equiv \{(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2) \mid \mu_1,\mu_2 \in \boldsymbol{R}, 0<\sigma_1^2, 0<\sigma_2^2\}$$
$$\boldsymbol{\Theta}_1 \equiv \{(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2) \mid \mu_1=\mu_2, \sigma_1^2=\sigma_2^2\}$$
$$\boldsymbol{\Theta}_2 \equiv \{(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2) \mid \mu_1>\mu_2, \sigma_1^2>\sigma_2^2\}$$

とする．さらに, 漸近理論を用いるために $lim_{n\to\infty}\ n_1/n = \lambda > 0 \quad (n=n_1+n_2)$ とする.

3　検定統計量

帰無仮説 H_0　: $\mu_1=\mu_2$ かつ $\sigma_1^2=\sigma_2^2$
とする．このとき,
帰無仮説 H_0 vs. 対立仮説 H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ または $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
と，制約条件 $\mu_1 \geqq \mu_2$，$\sigma_1^2 \geqq \sigma_2^2$ の下で,
帰無仮説 H_0 vs. 対立仮説 H_2: $\mu_1>\mu_2$ または $\sigma_1^2>\sigma_2^2$
の 2 つの検定について考察する.
文献 [2] より, ウェルチの検定統計量を S_1 とおく. つまり,

$$S_1 = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_1^2}{n_1}+\frac{\tilde{\sigma}_2^2}{n_2}}}$$

である.

命題 1　帰無仮説 H_0 の下で $S_1 \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$ である.

証明　一般性を失うことなく，$\mu_1=\mu_2=0$，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$ とする.

中心極限定理より,

$$\sqrt{n_1}\bar{X} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_1 \sim N(0,1), \qquad \sqrt{n_2}\bar{Y} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_2 \sim N(0,1)$$

また,

$$\sqrt{\frac{n}{n_1}} \xrightarrow{P} \sqrt{\frac{1}{\lambda}}\ ,\ \sqrt{\frac{n}{n_2}} \xrightarrow{P} \sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}$$

であることから, スラツキーの定理を用いると,

$$\sqrt{n}\bar{X} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{1}{\lambda}}Z_1\ ,\ \sqrt{n}\bar{Y} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}Z_2$$

であり，文献 [1] の定理 2.29, 定理 3.38 から $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}Z_1$, $\sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}Z_2$ は互いに独立で,

$$\sqrt{n}(\bar{X}-\bar{Y}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{1}{\lambda}}Z_1 - \sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}Z_2$$

となる. また, 文献 [1] 例 3.3 より $\tilde{\sigma}_1^2 \xrightarrow{P} 1$, $\tilde{\sigma}_2^2 \xrightarrow{P} 1$ であるので,

$$\sqrt{\frac{n}{n_1}\tilde{\sigma}_1^2+\frac{n}{n_2}\tilde{\sigma}_2^2} \xrightarrow{P} \sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}$$

である. スラツキーの定理より,

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_1^2}{n_1}+\frac{\tilde{\sigma}_2^2}{n_2}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}}\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}Z_1 - \sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}Z_2\right)$$

であり,

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}}\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}Z_1-\sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}Z_2\right)\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}}\left\{\sqrt{\frac{1}{\lambda}}E\left(Z_1\right)-\sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}E\left(Z_2\right)\right\}\\
&=0
\end{aligned}
$$

となり,

$$
\begin{aligned}
&V\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}}\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}Z_1-\sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}Z_2\right)\right)\\
&=\frac{1}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}\left\{\frac{1}{\lambda}V\left(Z_1\right)+\frac{1}{1-\lambda}V\left(Z_2\right)\right\}\\
&=1
\end{aligned}
$$

であるので, $S_1 \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$ を得る. □

また, 分散の検定統計量として,

$$
S_2 \equiv \frac{\log(\tilde{\sigma}_1^2)-\log(\tilde{\sigma}_2^2)}{\sqrt{\frac{2}{n_1}+\frac{2}{n_2}}}
$$

をおく.

補題 2 $\frac{(n_i-1)\tilde{\sigma}_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2_{n_i-1}$ $(i=1,2)$ である.

補題 3 $\sqrt{\frac{n}{2}}\left\{\log(\tilde{\sigma}_i^2)-\log(\sigma_i^2)\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} U_i \sim N\left(0,\frac{1}{\lambda_i}\right)$ $(i=1,2)$ が成り立つ.

このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 4 帰無仮説 H_0 の下で $S_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$ である.

証明 一般性を失うことなく, $\mu_1=\mu_2=0$, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$ とする.

$\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=1-\lambda$ としたとき, 補題 3 から,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{n}{2}}\log(\tilde{\sigma}_1^2) &\xrightarrow{\mathcal{L}} R_1 \sim N\left(0,\frac{1}{\lambda}\right),\\
\sqrt{\frac{n}{2}}\log(\tilde{\sigma}_2^2) &\xrightarrow{\mathcal{L}} R_2 \sim N\left(0,\frac{1}{1-\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 上記と文献 [1] の定理 2.29, 3.38 より,

$$
\sqrt{\frac{n}{2}}\left\{\log\left(\tilde{\sigma}_1^2\right)-\log\left(\tilde{\sigma}_2^2\right)\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} R_1-R_2
$$

また,

$$
\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n_1}+\frac{n}{n_2}}} \xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}}
$$

であることから, スラツキーの定理より,

$$
\frac{\log(\tilde{\sigma}_2^2)-\log(\tilde{\sigma}_1^2)}{\sqrt{\frac{2}{n_1}+\frac{2}{n_2}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}}(R_1-R_2)
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}}(R_1-R_2)\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}}E(R_1-R_2)\\
&=0
\end{aligned}
$$

であり,

$$
\begin{aligned}
&V\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}}(R_1-R_2)\right)\\
&=\frac{1}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}V(R_1)+\frac{1}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}V(R_2)\\
&=1
\end{aligned}
$$

である. よって, $S_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$ を得る. □

$$
\tilde{S_1} \equiv \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}
$$

とする.

補題 5 $\tilde{S_1}, S_2$ は互いに独立である.

ここで,

$$
\begin{aligned}
W_1 &\equiv \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}}\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}Z_1-\sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}Z_2\right),\\
W_2 &\equiv \frac{R_1-R_2}{\sqrt{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}}}
\end{aligned}
$$

とおく. このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 6 $\alpha,\beta \in \boldsymbol{R}$ を使って,

$$
\alpha S_1+\beta S_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha W_1+\beta W_2
$$

が成り立つ.

証明 $\tilde{S_1}=S_1\times\frac{\sqrt{\frac{n}{n_1}\tilde{\sigma}_1^2+\frac{n}{n_2}\tilde{\sigma}_2^2}}{\sqrt{\frac{n}{n_1}\sigma_1^2+\frac{n}{n_2}\sigma_2^2}}$ であり, 命題 1 と $\frac{\sqrt{\frac{n}{n_1}\tilde{\sigma}_1^2+\frac{n}{n_2}\tilde{\sigma}_2^2}}{\sqrt{\frac{n}{n_1}\sigma_1^2+\frac{n}{n_2}\sigma_2^2}} \xrightarrow{P} 1$ であることから, スラツキーの定理より,

$$
\tilde{S_1} \xrightarrow{\mathcal{L}} W_1
$$

が成り立つ. これと命題 4, 補題 5, 定理 3.38 より,

$$
\alpha\tilde{S_1}+\beta S_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha W_1+\beta W_2
$$

が成り立つ. また, $\alpha(S_1-\tilde{S_1}) \xrightarrow{P} 0$ より, スラツキーの定理から

$$
\alpha(S_1-\tilde{S_1})+\alpha\tilde{S_1}+\beta S_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha W_1+\beta W_2
$$

$$\Longleftrightarrow \alpha S_1 + \beta S_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha W_1 + \beta W_2$$

が成り立つ. □

定理 7　$T_1 = S_1^2 + S_2^2$ とおく．このとき，帰無仮説 H_0 の下で $T_1 \xrightarrow{\mathcal{L}} W_1^2 + W_2^2 \sim \mathcal{X}_2^2$ が成り立つ．

証明　補題 6 より,

$$\alpha S_1 + \beta S_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha W_1 + \beta W_2$$

である．したがって, クラメルーウォルドのテクニックより,

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$$

が成り立ち, 文献 [1] 定理 3.39, 文献 [1] 定理 3.17 の順に適用することで定理を得る．

定理 8　$T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 + S_2)$ とおく．このとき，帰無仮説 H_0 の下で $T_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$ が成り立つ．

証明　補題 6 より，$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を適用すると,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 + S_2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 + W_2) \sim N(0,1)$$

を得る． □

4　検定方式

H_0 vs. H_1 に対する 3 つの検定方式を考える．
H_0 の下で定理 7 より,

$$T_1 \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{X}_2^2$$

が成り立つ．

T_1 を検定統計量として, 自由度 2 のカイ 2 乗分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $\mathcal{X}_2^2(\alpha)$ とする．このとき水準 α の漸近的な検定方法は, 検定関数 $\phi_1(\cdot)$ を用いて,

$$\phi_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \begin{cases} 1 & (T_1 > \mathcal{X}_2^2(\alpha) \text{ のとき}) \\ 0 & (T_1 < \mathcal{X}_2^2(\alpha) \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} H_0 \text{を棄却する} & (T_1 > \mathcal{X}_2^2(\alpha) \text{ のとき}) \\ H_0 \text{を棄却しない} & (T_1 < \mathcal{X}_2^2(\alpha) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表現される．

次に，検定統計量 S_1，S_2 を用いた水準 α の検定方式を考える．

その際に, H_0 の下で

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} P_0\left(|S_1| > t_0 \text{または} |S_2| > t_0\right)$$

を満たす t_0 を考える．

同様に,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} P_0\left(|S_1| > t_1 \text{かつ} |S_2| > t_1\right)$$

を満たす t_1 を考える．このとき標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $z(\alpha)$ とすると, $t_0 = z\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}\right)$，$t_1 = z\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right)$ とでき, 水準 α の漸近的な検定方法は, 検定関数 $\phi_2(\cdot)$, $\phi_3(\cdot)$ を使って, それぞれ

$$\phi_2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \begin{cases} 1 & (|S_1| > t_0 \text{または} |S_2| > t_0 \text{のとき}) \\ 0 & (|S_1| < t_0 \text{かつ} |S_2| < t_0 \text{のとき}) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} H_0 \text{を棄却する} & (|S_1| > t_0 \text{または} |S_2| > t_0 \text{のとき}) \\ H_0 \text{を棄却しない} & (|S_1| < t_0 \text{かつ} |S_2| < t_0 \text{のとき}) \end{cases}$$

$$\phi_3(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \begin{cases} 1 & (|S_1| > t_1 \text{かつ} |S_2| > t_1 \text{のとき}) \\ 0 & (|S_1| < t_1 \text{または} |S_2| < t_1 \text{のとき}) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} H_0 \text{を棄却する} & (|S_1| > t_1 \text{かつ} |S_2| > t_1 \text{のとき}) \\ H_0 \text{を棄却しない} & (|S_1| < t_1 \text{または} |S_2| < t_1 \text{のとき}) \end{cases}$$

と表現される．

次に, H_0 vs. H_2 に対する 3 つの検定方式を考える．
H_0 の下で定理 8 より,

$$T_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

が成り立つ．

T_2 を検定統計量として, 標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $z(\alpha)$ とする．このとき水準 α の漸近的な検定方法は, 検定関数 $\phi_4(\cdot)$ を用いて,

$$\phi_4(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \begin{cases} 1 & (T_2 > z(\alpha) \text{ のとき}) \\ 0 & (T_2 < z(\alpha) \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} H_0 \text{を棄却する} & (T_2 > z(\alpha) \text{ のとき}) \\ H_0 \text{を棄却しない} & (T_2 < z(\alpha) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表現される．

次に，検定統計量 S_1，S_2 を用いた水準 α の検定方式を考える．

その際に, H_0 の下で

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} P_0\left(S_1 > t_2 \text{または} S_2 > t_2\right)$$

を満たす t_2 を考える．

同様に,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} P_0\left(S_1 > t_3 \text{かつ} S_2 > t_3\right)$$

を満たす t_3 を考える．このとき標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $z(\alpha)$ とすると, $t_2 = z\left(1 - \sqrt{1-\alpha}\right), t_3 = z\left(\sqrt{\alpha}\right)$ とできる．したがって，水準 α の漸近的な検定方法は, 検定関数 $\phi_5(\cdot)$，$\phi_6(\cdot)$ を使って, それぞれ

$$\phi_5(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \begin{cases} 1 & (S_1 > t_2 \text{または} S_2 > t_2 \text{のとき}) \\ 0 & (S_1 < t_2 \text{かつ} S_2 < t_2 \text{のとき}) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} H_0 \text{を棄却する} & (S_1 > t_2 \text{または} S_2 > t_2 \text{のとき}) \\ H_0 \text{を棄却しない} & (S_1 < t_2 \text{かつ} S_2 < t_2 \text{のとき}) \end{cases}$$

$$\phi_6(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \begin{cases} 1 & (S_1 > t_3 \text{かつ} S_2 > t_3 \text{のとき}) \\ 0 & (S_1 < t_3 \text{または} S_2 < t_3 \text{のとき}) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} H_0 \text{を棄却する} & (S_1 > t_3 \text{かつ} S_2 > t_3 \text{のとき}) \\ H_0 \text{を棄却しない} & (S_1 < t_3 \text{または} S_2 < t_3 \text{のとき}) \end{cases}$$

と表現される．

5　検出力を用いた検定法の優劣

この章では 4 章で述べた検定法の検出力を定義し, それを用いて検定法の優劣を調べる.

本論では，乱数により標本を疑似的に生成し検出力を導出して，シミュレーションを行う．シミュレーションの方法は本稿の方に記載した.

5.1　検出力の設定

H_0 vs. H_1 に関する 3 つの検定法に対する検出力をそれぞれ $\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_1), \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_2), \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_3) \quad (\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_1^c)$ とする.

同様に, H_0 vs H_2 に関する 3 つの検定法に対する検出力をそれぞれ $\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_4), \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_5), \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_6) \quad (\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_2)$ とする.

このとき,

$$\begin{aligned}
\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_1) &= E_{\boldsymbol{\theta}}\{\phi_1(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\} \ \ (\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_1^c) \\
\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_2) &= E_{\boldsymbol{\theta}}\{\phi_2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\} \ \ (\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_1^c) \\
\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_3) &= E_{\boldsymbol{\theta}}\{\phi_3(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\} \ \ (\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_1^c) \\
\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_4) &= E_{\boldsymbol{\theta}}\{\phi_4(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\} \ \ (\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_2) \\
\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_5) &= E_{\boldsymbol{\theta}}\{\phi_5(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\} \ \ (\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_2) \\
\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_6) &= E_{\boldsymbol{\theta}}\{\phi_6(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\} \ \ (\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_2)
\end{aligned}$$

である.

5.2　検定法の比較

H_0 の下で，$\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_i) \ \ (i = 1, \cdots, 6)$ は

$$\begin{aligned}
\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_1) = \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_2) = \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_3) = \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_4) = \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_5) = \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_6) \\
= \alpha \ \ (\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_1)
\end{aligned}$$

であることから,

H_0 vs H_1 に関する検定では,

$$\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_{max1}) = max\,\{\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_1), \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_2), \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_3)\} \quad (\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_1^c)$$

とすると，$\phi_{max1}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ を最も優れた検定法とできる.

同様に，H_0 vs. H_2 に関する検定では,

$$\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_{max2}) = max\,\{\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_4), \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_5), \beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_6)\} \quad (\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_2)$$

とすると，$\phi_{max2}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ を最も優れた検定法とできる.

6　C言語プログラムの実行結果と解析結果

6.1　解析内容

5 章で述べた検定法の優劣を調べるにあたり，検出力を複数回導出し，その検出力が最大になった回数が最も多い検定法を最も優れた検定法とする.

H_0 vs. H_1 に関する検定では，H_1 が $(\mu_1 \neq \mu_2$ かつ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$, $(\mu_1 = \mu_2$ かつ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$, $(\mu_1 \neq \mu_2$ かつ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ それぞれの場合における最も優れた検定法を解析する.

H_0 vs. H_2 に関する検定では，H_2 が $(\mu_1 > \mu_2$ かつ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2)$ の場合での最も優れた検定法を解析する.

6.2　解析結果

ここでは，水準 $\alpha = 0.05$ においての検定法の優劣の解析結果のみを記載する．プログラムの詳細については，本稿に記載した.

本論では各設定それぞれにおいて 100 通りのモデルを生成し，各モデルに対し 100000 個の 2 標本を生成した.

設定 1 から設定 3 は，水準 $\alpha = 0.05$ での両側検定についてのモデルである.

設定 1 は平均相違モデル，設定 2 は分散相違モデル，設定 3 は平均分散同時相違モデルである．結果は，表 1 のようになった.

表 1　各設定において各検出力が最大となった回数 $(\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_1^c)$

モデル	$\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_1)$	$\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_2)$	$\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_3)$
設定 1(平均相違)	31 回	69 回	0 回
設定 2(分散相違)	5 回	95 回	0 回
設定 3(平均分散同時相違)	96 回	4 回	0 回

表 1 から，水準 $\alpha = 0.05$ での両側検定による平均相違の検出においては，$\phi_2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ が他の検定法と比べて優れているといえる．また，分散相違においても $\phi_2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ が他の検定法と比べて優れているといえる．一方，両側検定による平均分散両方の相違検出においては, $\phi_1(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ が他の検定法と比べて優れているといえる.

設定 4 は水準 $\alpha = 0.05$ での片側検定についてのモデルである．また，設定 4 は平均分散同時相違モデルである．結果は，表 2 のようになった.

表 2　各検出力が最大となった回数 $(\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_2)$

モデル	$\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_4)$	$\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_5)$	$\beta_{\boldsymbol{\theta}}(\phi_6)$
設定 4(平均分散同時相違)	99 回	1 回	0 回

表 2 から，水準 $\alpha = 0.05$ での片側検定による平均分散の同時検出においては, $\phi_4(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ が他の検定法よりも優れているといえる.

7　おわりに

本論文では 2 標本の正規分布モデルにおける平均と分散の同時検出のための検定方式を提案した．そして，検定法の優劣を調べるための検出力導出プログラムを C 言語で作成し，プログラムで発生させた乱数データを用いてシミュレーションを行い，結果の解析を行うことにより, 理解を深めることができた.

参考文献

[1] 白石高章 :『統計科学の基礎』. 日本評論社, 東京,2012.

[2] Welch, B.L. (1938). The significanse of the difference between two means when the population variance are unequal. *Biometrika*, **25**, 350-362.