教科書の行間埋めによる授業構想

ー 中学校数学「方程式」を中心として ー

2015SS078 田中 勇一
指導教員: 佐々木 克巳

1　　はじめに

本研究の目的は, 教科書の行間を埋めることにより, 授業構成に必要な情報を整理し, よりよい授業につなげていくことである. この行間埋めは, 予想される生徒の反応, 目標に照らして強調すべきこと, より丁寧な解説, 既習の内容とその関係, 例題と問の関係, 難易度の違い, その部分が必要な理由, 別解, 解説, どのように生徒に発問させるかなどをふまえて行う. 行間埋めを行う教科書は啓林館の中学校の教科書([1], [2])とし, 行間埋めに必要な情報は[3]などから抽出する.

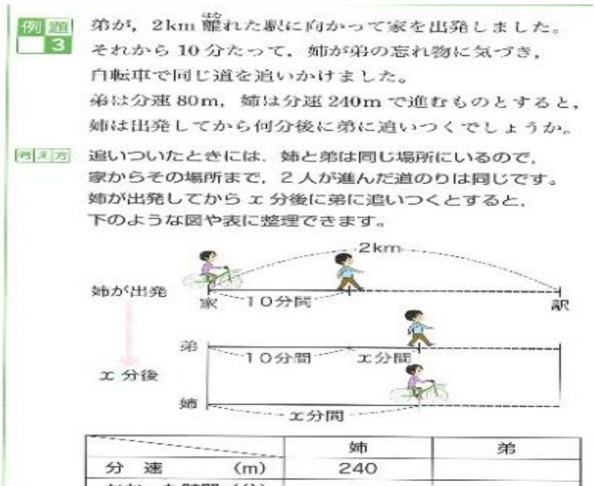
卒業論文では, [1]の「方程式」, 「方程式の利用」, [2]の「連立方程式」, 「連立方程式の利用」を扱った. 本稿では, そのうちの「方程式の利用」, 「連立方程式の利用」から 2 つの例を示す.

2　　行間埋めの例

この節では[1]の「方程式の利用」, [2]の「連立方程式の利用」から行間埋めの例を 2 つ示す. 各例は, 引用部, 補う内容で構成する. 補う内容は、卒業研究で示したものの一部である.

例1.　　方程式の利用

引用部:


例題 3
弟が, 2km 離れた駅に向かって家を出発しました。それから 10 分たって, 姉が弟の忘れ物に気づき, 自転車で同じ道を追いかけました。
弟は分速 80m, 姉は分速 240m で進むものとすると, 姉は出発してから何分後に弟に追いつくでしょうか。

考え方
追いついたときには, 姉と弟は同じ場所にいるので, 家からその場所まで, 2 人が進んだ道のりは同じです。
姉が出発してから x 分後に弟に追いつくとすると, 下のような図や表に整理できます。

	姉	弟
分　速　　　(m)	240	
かかった時間 (分)	x	
進んだ道のり (m)		

補う内容:

(1)この問題の特徴は, 速さ・時間・道のりの関係を用いること, 線分図と表を利用すること, 与えられた値を変えることで「方程式の解が問題にあっている」の意味に気づくことができることの 3 つである. 3 つ目は, 直後の問4(この例題の値を変えて, 実際には追いつけない問題)との連続性を考えている.

(2)必要に応じて, 道のり＝速さ×時間の関係を復習する. この復習は, 問題文を確認し, その内容から, 速さの問題であることを意識させた後, その生徒の反応に応じて行う. 第 2 学年の「連立方程式の利用」でも, 道のり＝速さ×時間の関係を用いた問題が例題となっていることから, この関係は定着させる必要があると考える.

(3)「考え方」の第1文に次のように補う. 最初に, 二通りに表される数量を探す. そのとき, 「考え方」にある線分図がヒントなる. 線分図は, 直前の例題 2 でも利用されており, 生徒の反応に応じて, それを振り返ることも考える. 探すべき数量は, 「考え方」の第1文のとおりであるが, 言葉の式では, 次のようになる.

(弟が進んだ道のり)＝(姉が進んだ道のり)

ここで, この関係を理解させるのに, 生徒の反応が悪いときは, 「考え方」にある「追いついたときには同じ場所にいる」の意味を考えさせるとよいと考える.

(4) 「考え方」の表に次のように補う. この表は, (2)の関係をxの式で表すための表である. この表は, 問題文と(2)の関係から埋めることができ, そこから, 方程式を立式できる.

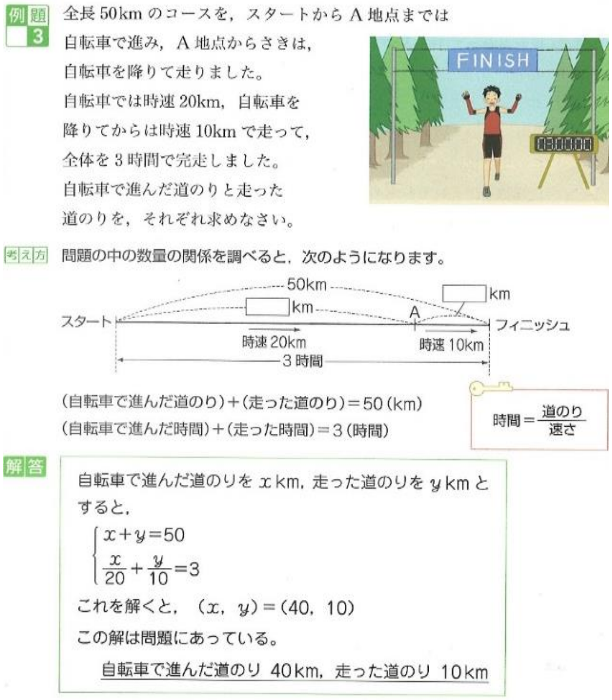
あるいは, 生徒によっては, 表を使わずとも(2)の関係から立式できる場合もあると考える.

(5)「解答」に次のように補う. 「この解は問題にあっている」の意味を説明する必要がある. これは問題に対して解が適切であるかどうかである. これまでの問題では, 個数や人数を求める問題では, 正の値であることや整数値であることの確認であったが, この問題では, さらに確認が必要である. 具体的には, 「解答」に, 「家から駅までが 2km である」という情報が使われていないことなどから, 追いついた場所が家から 2km 以内であることを確かめる必要性に気づかせ, 「5 分後に, 家から 1.2km の地点で追いつき, 駅までは 2km だから, 弟が駅につくまでに追いつけて, 問題にあっている」と確認する必要がある.

例2.　　連立方程式の応用

補う内容:

(1)この問題の特徴は, 速さ・時間・道のりの関係を用いること, 線分図と表を利用することである. 故に場合によっては例 1 と同様に速さ・時間・道のりの関係を復習する必要がある. また, 線分図のよさを理解し, 活用することができるようにすることも目標となる.



例題 3 全長 50km のコースを，スタートから A 地点までは自転車で進み，A 地点からさきは，自転車を降りて走りました。
自転車では時速 20km，自転車を降りてからは時速 10km で走って，全体を 3 時間で完走しました。
自転車で進んだ道のりと走った道のりを，それぞれ求めなさい。

考え方 問題の中の数量の関係を調べると，次のようになります。

(自転車で進んだ道のり)＋(走った道のり)＝50 (km)
(自転車で進んだ時間)＋(走った時間)＝3 (時間)

時間＝$\dfrac{道のり}{速さ}$

解答 自転車で進んだ道のりを x km，走った道のりを y km とすると，

$$\begin{cases} x+y=50 \\ \dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{10}=3 \end{cases}$$

これを解くと，$(x,\ y)=(40,\ 10)$
この解は問題にあっている。
自転車で進んだ道のり 40km，走った道のり 10km

(2)「考え方」に次のように補う．最初に，二通りに表される数量を探す．そのとき，「考え方」にある線分図がヒントなる．線分図は，例題 3 で初めて利用されている．この線分図を利用することで，速さ，道のり，時間の関係が視覚的にとらえやすくなっている．

これまでの例題の考え方から，自転車の道のりをx，走った道のりをyとおいて，次のように表を補う．

	自転車	走る	合計
道のり	x	y	50
速さ	20	10	
時間	$\dfrac{x}{20}$	$\dfrac{y}{10}$	3

(3)引用の解答とは，変数のおき方を変えてみる．自転車かかった時間をx，走った時間をyとおくと表は次のようになる．

	自転車	走る	合計
時間	x	y	3
速さ	20	10	
道のり	$20x$	$10y$	50

立式は次のようになる．

$$x+y=3$$
$$20x+10y=5$$

これを解いて，$y=1\ x=2$となる．ここで注意すべき点は，このx, yが問題の解でないことである．問題は自転車で進んだ道のりと走った道のりを求めることであるため，$10x, 20y$が求める解である．連立方程式の解を代入すると問題の答えがでる．

時間をx, yとおくと，立式の形は単純で見やすくなるが連立方程式の解が例題の解に直結しているわけでない．

(4) 連立方程式のよさを考えたいため 1 つの変数で立式してみる．自転車で進んだ道のりをxとすると走った道のりは$50-x$と表せるので，かかった時間が 3 時間であることからxは

$$\frac{x}{20}+\frac{50-x}{10}=3$$

の解として求められる．

[2]の「連立方程式の利用」において，連立方程式での立式と一元一次方程式の立式の結果を並べると表 1 のようになる．

表 1：立式

連立方程式	一元一次方程式
$2x+y=940$ $x+2y=680$	$x+2(940-2\,x)$ $=680$
$x+y=10$ $130x+100y$ $=1120$	$130x+100(10-x)$ $=1120$
$x+y=165$ $\dfrac{40}{100}x+\dfrac{50}{100}y$ $=74$	$\dfrac{40}{100}x+\dfrac{50}{100}(165$ $-x)=74$
$x+y=400$ $\dfrac{80}{100}x+\dfrac{90}{100}y$ $=345$	$\dfrac{80}{100}x+\dfrac{90}{100}(400$ $-x)=345$
$x+y=50$ $\dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{10}=3$	$\dfrac{x}{20}+\dfrac{50-x}{10}=3$

これを比較すると，連立方程式にはxの式をかこむカッコ（または，分子がxの式の分数）は現れないが一元一次方程式にはカッコが現れる，すなわち連立方程式の方が単純である．また，一元一次方程式の立式では，カッコの中の立式を行ってから，それを用いて，全体の立式を行う 2 段階の手順をふんでいる．一方，連立方程式の立式では，一元一次方程式の 2 段階の手順を独立に行っている．その意味では連立方程式の方が単純である．

3 おわりに

本研究では，中学校数学「方程式」の行間埋めを行った．それによって，教科書の定義や問題を様々な観点から着目できることを学んだ．これから教員として働く上で，活かしていくことができると思う．これからも，「関数」や「図形」などの行間埋めを継続していくことで，授業に活かしていきたい．

参考文献

[1] 岡本和夫 他 44 名:『未来へひろがる 数学 1』. 啓林館，大阪，2015.
[2] 岡本和夫 他 44 名:『未来へひろがる 数学 2』. 啓林館，大阪，2015.
[3] 文部科学省『中学校学習指導要領解説数学編』日本文教出版，大阪，平成 30 年