解法をもとにした図形問題の発展的考察

2015SS071 竹多侑平

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，中学数学の図形問題を発展的に考察することで，類似の発展問題などの教材作成に活かすことである．

具体的には，与えられた図形問題を条件変えなどで，一般化し，それをもとの問題とは別の形で特殊化することで，同様の解法で解ける新しい問題ができないかを考察する．

本研究では，[1] から抽出した 1 題，[2] から抽出した 3 題について考察した．本稿ではそのうちの 2 題を示す．

2　三平方の定理の問題

この節では，[2] の問題 206(2) に対する考察を示す．

問 ([2])．1 辺の長さが 1cm の正方形を紙で 2 枚作って重ね，そのうちの 1 枚を対角線の交点を中心として 45° 回転させたとき，2 枚の正方形が重なる部分 (図の影の部分) の面積は $\boxed{}$ cm^2 である (図 1).

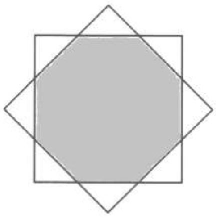

図 1　問題 206(2)

略解．8 つの白い直角二等辺三角形はすべて合同である．等辺の長さを x とおくと 3 辺の比が $1:1:\sqrt{2}$ であるから，正方形の 1 辺を x を用いて表現でき，$x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ となる．したがって，求める面積は $2\sqrt{2}-2$ になる．

本研究では，上の x を求める部分を

(i) 回転の角 45° を θ に一般化すること

(ii) 正方形を正 n 角形に一般化すること

を考え，その一般化の結果を特殊化して，新しい問題を作成する．

まず, (i) の一般化を考察する. 正方形の 1 辺を a, 回転角を θ とし, 図 2 のように点 A,B,C,D,A′,B′,C′,D′,E,E′,F,F′ と，角 x_1,x_2,x_3,x_4 をとる．いくつかの三角形の合同を示すことにより，8 つの白い三角形はすべて合同と証明できる．

$\triangle$AOA′ と $\triangle$AE′A の内角を比較することにより $\angle$AE′A′ $=\theta$ である．よって $\alpha=x_1$ とおくと,

$$x\cos\theta+x+\frac{x\sin\theta}{\tan\alpha}=a$$

$$x=\frac{a}{1+\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\tan\alpha}} \tag{1}$$

$\triangle$AA′E′ の内角を考えると $90^\circ+\theta+2\alpha=180^\circ$ であるから，$\alpha=\frac{90^\circ-\theta}{2}$ である．よって (1) より，θ から x が求められる．

次に，(ii) の一般化を考察する．正 n 角形 $(n=3,5)$ の 1 辺 a，1 角を β，回転角 θ とし，図 3，図 4 のように点と，$x_1(=\alpha)$ をとる．すると，$x=\frac{a}{1+\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\tan\alpha}}$, $\alpha=90^\circ-\frac{\beta-\theta}{2}$ が成り立つ．

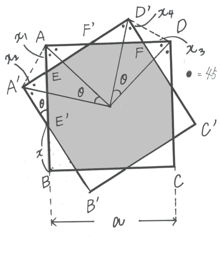

図 2　206(2) 一般形

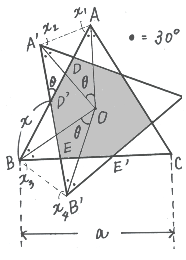

図 3　正三角形

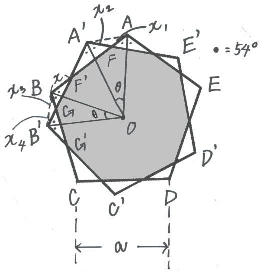

図 4　正五角形

上の結果を特殊化した問題を作成する．中学生でも解けるようにするには，θ,α が 30°,45°,60° であることが必要である．その 9 通りのうち，対応する正 n 角形が存在する場合の 3 通りと，存在しない例を以下の (a)∼(d) に示す．また対応する正 n 角形が存在することを確認するために β の値も示す．

(a)　$\theta=30^\circ$,$\alpha=30^\circ$ のとき $\beta=90^\circ$

(b)　$\theta=30^\circ$,$\alpha=45^\circ$ のとき $\beta=60^\circ$

(c)　$\theta=60^\circ$,$\alpha=30^\circ$ のとき $\beta=60^\circ$

(d)　$\theta=60^\circ$,$\alpha=45^\circ$ のとき $\beta=30^\circ$

対応する正 n 角形が存在する (a),(b),(c) の場合のみ問題として成り立つ．それぞれの x の値は以下のとおりである．また，それぞれの図を図 5，図 6，図 7 に示す．

(a)$x=\frac{a}{1+\sqrt{3}}$　(b)$x=\frac{2a}{3+\sqrt{3}}$　(c)$x=\frac{a}{3}$

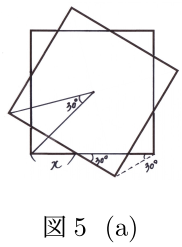

図 5　(a)

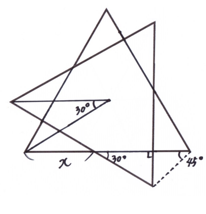

図 6　(b)

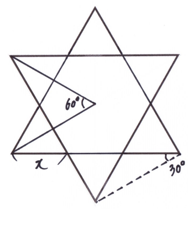

図 7　(c)

3　動点と図形の計量

この節では，[2] の問題 242(3)，(4) に対する考察を示す．

問 ([2])．図 8 のように，1 辺の長さが 12cm である正三角

形 ABC がある．2 点 P，Q はそれぞれ頂点 A，B を同時に出発して，P は辺上を反時計回りに毎秒 1cm の速さで動き，Q は辺上を反時計回りに毎秒 2cm の速さでいずれも 12 秒間動くとする．このとき，次の問いに答えなさい．ただし，答えは分母に根号を含まず，それ以上約分できない形とすること．((1)，(2) は省略している．)

(3) P，Q が出発してから 6 秒以内に △BPQ の面積が △ABC の面積の $\frac{5}{18}$ となるのは何秒後か求めなさい．

(4) P，Q が出発してから 6 秒以降に △BPQ の面積が △ABC の面積の $\frac{5}{18}$ となるのは何秒後か求めなさい．

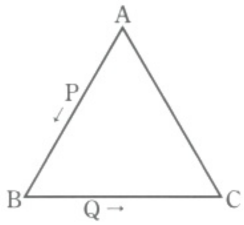

図 8 問題 242

略解．(3)2 秒後 (4)$12-2\sqrt{5}$ 秒後

考察．本研究では，上の問題の一般化を考察し，その結果を特殊化して，新しい問題を作成する．

まず，一般化を考察する．図 9 のように 3 辺をそれぞれ a,b,c，P，Q の速度をそれぞれ毎秒 $p,q(p<q)$ とする．また $\frac{c}{p}=\frac{a+b}{q}$ とし，いずれも $\frac{c}{p}$ 秒間動くとする．さらに △BPQ の面積が △ABC の $x(0<x<1)$ 倍になるのは何秒後かを求める問題とする．求める時間を t とし，Q が BC 上か CA 上かで場合分けする．

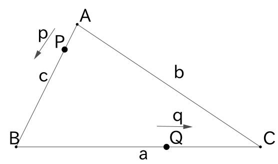

図 9 一般化

(i) $0<t<\frac{a}{q}$ のとき，P は AB 上，Q は BC 上にある．AP$=pt$,BQ$=qt$,PB$=c-pt$ より △PBQ$=\frac{c-pt}{c}\times\frac{qt}{a}$ △ABC．よって

$$\frac{c-pt}{c}\times\frac{qt}{a}=x$$

$$pt^2-ct+\frac{ac}{q}x=0 \tag{2}$$

$$t=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4\frac{acp}{q}x}}{2p}$$

(ii) $\frac{a}{q}<t<\frac{c}{p}$ とき，P は AB 上，Q は CA 上にある．AP$=pt$ より PB$=c-pt$．BC+CQ$=qt$ より AQ$=a+b-qt=\frac{q}{p}c-qt$．△PBQ$=\frac{c-pt}{c}\times\frac{\frac{q}{p}c-qt}{b}$ △ABC．よって

$$\frac{c-pt}{c}\times\frac{\frac{q}{p}c-qt}{b}=x$$

$$t=\frac{1}{p}(c\pm\sqrt{\frac{bcp}{q}x}) \tag{3}$$

次に，上の結果を特殊化した問題を作成する．今回は $p=1$ として考え，(2) をみたす t が整数で求められる場合を考える．(2) について，$(t-m)(t-n)=0$(m,n は整数) と因数分解できるとし，具体例を 1 つあげる．

(a) $(t-4)(t-8)=0$ と因数分解できるとすると，(2) は $t^2-12t+32=0$ となるので，$c=12,\frac{ac}{q}x=32$ となる．これらより，$\frac{a}{q}x=\frac{8}{3}$ である．$x=\frac{4}{9}$ とすると，$\frac{a}{q}=6$ となり，$q=3$ とすると $a=18$ である．$\frac{c}{p}=\frac{a+b}{q}$ であるから，$b=18$ となる．まとめると $(a,b,c,p,q,x)=(18,18,12,1,3,\frac{4}{9})$ である (図 10 参照)．t を求めると，次のようになる．

(i) $0<t<\frac{a}{q}$ すなわち $0<t<6$ のとき，$(t-4)(t-8)=0$ より $t=4$.

(ii) $\frac{a}{q}<t<\frac{c}{p}$ すなわち $6<t<12$ のとき，(3) より，$t=12-4\sqrt{2}$.

他に図 11，図 12 に示す例もある．

特殊化の結果を，失敗例も含め表 1 に示す．

表 1 特殊化 結果

a	b	c	p	q	x	(i) の t	(ii) の t
18	18	12	1	3	$\frac{4}{9}$	4	$12-4\sqrt{2}$
32	48	20	1	4	$\frac{15}{32}$	5	$20-\frac{15}{2}\sqrt{2}$
24	30	18	1	3	$\frac{1}{2}$	6	$18-3\sqrt{10}$
18	30	16	1	3	$\frac{1}{2}$	4	範囲内に t がない
24	12	18	1	2	$\frac{1}{3}$	6	範囲内に t がない
30	15	15	1	3	$\frac{1}{3}$	三角形ができない	
40	20	15	1	4	$\frac{1}{3}$	三角形ができない	

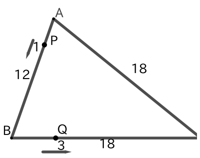

図 10

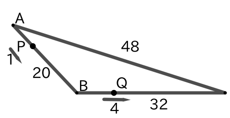

図 11

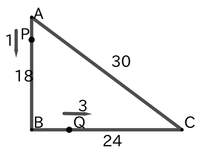

図 12

参考文献

[1] 赤尾文夫：『中学総合的研究　高校入試問題集　数学図形読解　新装版』．旺文社，東京，2010.

[2] 益井英郎：『最高水準問題集　高校入試　数学』．文英堂，京都，2013.