述語論理のタブローとセマンティクス

2015SS064 曽我 則之
指導教員: 佐々木 克巳

1 はじめに

本研究の目的は, 述語論理のタブローとセマンティクスの関係について理解を深めることである. そして, 機械的に論理式の集合の充足可能性(無矛盾性)の判断ができるようになることを目指している. 具体的には, [1]で紹介されている, PPL のタブローとそのセマンティクスの関係を理解する.

本稿では, 2 節で PPL を導入する. 3 節で, タブローを導入しその例を挙げる. そして, 4 節でセマンティクスを導入する. 最後に 5 節で閉鎖タブローとそのセマンティクスの 1 つである「矛盾していること」との関係を述べる.

2 PPL

この節では, [1]にしたがって, PPL を導入する.

PPL の語彙

1. 項(term) : 個体定項 (a,b,c,…),
   個体変項 (x,y,z,…)
2. 述語記号 : (P,Q,R,S,…)
3. 論理定項 : 結合子 (→,∧,∨,￢),
   量化子 (∀,∃)
4. 補助記号 : ((,))

次に PPL の論理式の定義を示す.

[定義 2.1]

(1) 1 つの n 項述語記号の後ろに n 個の項をおいたものは論理式である. これを原子式と呼ぶ.
(2) A,B を論理式とすると, (A∧B), (A∨B), (A→B), (￢A)はおのおの論理式である.
(3) A を論理式, ξを個体変項とすると, (∀ξA), (∃ξA)はおのおの論理式である.

この定義に出てきた「ξ」はこれから個体変項をあらわす図式文字として使い, x,y,z,…の任意のものを定めずに代表する.

3 PPL のタブロー

タブローというのは妥当性, 矛盾, トートロジーといった論理学の重要概念を機械的に判定する手続きのことである. この節では, PPL のタブローを導入する.

[定義 3.1]論理式の集合をΓとする. Γから出発するタブロー, およびその経路を次のように定義する.
(i) Γの要素を縦に並べた図式 T は, Γから出発するタブローであり, その経路は T 自身である.
(ii)T はΓから出発するタブローで, X は T の経路θに現れる論理式とする. また, I は 11 個の展開規則の 1 つとする(11 個のうちの 2 個を表 3.1 に示す). このとき, 次のようにして得られる T'とθ$_1$(あるいはθ$_1$とθ$_2$)は, それぞれΓから出発するタブロー, T'の経路である.
(1)I が[∧]で, X＝A∧B のとき, T'は, T から T のθの下に続けて A と B を縦に並べて書き加えて得られる図式で, θ$_1$は, θから, θの下に続けて A と B を縦に並べて書き加えて得られる図式である.
(2)I が[∨]で X＝A_1∨A_2のとき, θの下に続けて, 図式

/\
A B

を縦に並べて書き加えて得られる図式で,

θ$_i$(i＝1,2)は, θから, θの下に続けて A_i を書き加えて得られる図式である.
(3)I が, 他の 9 個の展開規則のときも同様に定義する.

上の定義において T から T'を求めることを T に展開規則 I を適用するという. 同様に,「経路θに展開規則を適用する」といういい方もする. タブローの経路は, 混乱のないときは, その経路に現れる論理式の集合として表すこともある.

集合{(A∨B)∧C}から出発するタブローの例を挙げる.
[例 3.2]

(A∨B)∧C
A∨B
C
/\
A B

これは, 展開規則[∧]と[∨]を適用した後のタブローである. このタブローの経路は{(A∨B)∧C, A∨B, C, A}と{(A∨B)∧C, A∨B, C, B}である.

以下, 4 節以降のために必要な概念をタブローに定義する.

[定義 3.3]タブローの経路は, その経路に A と￢A が現れるとき閉鎖経路であるといい, 閉鎖経路でない経路を開放経路という. 閉鎖経路の末端には×をつけることがある.

[定義 3.4]すべての経路が閉鎖経路であるようなタブローを閉鎖タブローという. 一方, まだ 1 つでも開放経路が残っているタブローを開放タブローという.

表 3.1:展開規則の例

[∧]	[∨]
A∧B ↓ A B	A∨B ╱╲ A　　B

4 PPL のセマンティクス

この節では, [1]にしたがって, PPL のセマンティクスを導入する. 具体的には, モデルの定義と真理の定義を示す.

[定義 4.1](モデルの定義)モデル M は空でない集合 D と次をみたす付値関数 V との対, M＝⟨D,V⟩のことである.
(1) V は述語記号Φ^nにはD^nの部分集合を割り当てる.
　$V(\Phi^n)\subseteq D^n$
(2) V は個体定項αには D の要素を割り当てる.
　$V(\alpha)\in D$

[定義 4.2](真理の定義)モデル M における論理式への真理値(1 または 0)への割り当てを次のように定義する.「1」を「真」,「0」を「偽」ということもある.
(1) $V_M(\Phi^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)=1 \Leftrightarrow \langle V(\alpha_1),V(\alpha_2),\ldots,V(\alpha_n)\rangle\in V(\Phi^n)$
(2) A が B∧C のとき, $V_M(A)=1 \Leftrightarrow V_M(B)=1$ かつ $V_M(C)=1$
(3) A が¬B のとき, $V_M(A)=1 \Leftrightarrow V_M(B)=1$ でない.

また, 論理式の集合Γに対し,「Γが矛盾している」の意味は以下の通りである.

[定義 4.3]Γに属するすべての論理式を真にするモデルが存在しないとき, Γは矛盾しているという. Γが矛盾していないとき, Γは充足可能であるという.

5 閉鎖タブローと矛盾していることの関係

この節では, 次の定理を考える.

[定理 5.1]論理式の集合Γに対し, 次の 2 条件は同値である.
(1) Γが矛盾している
(2) Γから出発するタブローが閉鎖タブローになる.

(2)⇒(1)の証明は, [1]の証明を構成に関する帰納法を用いて, 丁寧に補った. (1)⇒(2)は, [1]では, ヒンティッカ集合を定義して, それらが充足可能であることを示している. 本研究ではこの部分を詳しく補った.

[定義 5.2]次の条件(¬)と 11 個の各展開規則に対応する条件を満たす閉じた論理式(個体変項の自由な現れがない論理式)の集合Δをヒンティッカ集合という.
(¬):どんな原子式 A についても A と¬A の両方がΔに属することはない.
11 個の展開規則に対応する条件は, 本稿では, 表 3.1 の 2 つの展開規則に対する条件のみを示す.
(∧):A∧B∈Δ ⇒ A∈Δかつ B∈Δ
(∨):A∨B∈Δ ⇒ A∈Δまたは B∈Δ

[補助定理 5.3]どんなヒンティッカ集合も充足可能である.
〈証明〉任意のヒンティッカ集合をΔとする. 以下にモデル M(＝(D,V))を定義する.
(M1)論議領域 D を, Δに現れるすべての個体定項を含み, それ以外の個体は含まない集合とする.
(M2)個体定項αへの付値 V を, $V(\alpha)=\alpha$と決める.
(M3)述語記号Φ^nへの付値 V を次のように決める.
$V(\Phi^n)=\{\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle \mid \Phi^n\alpha_1\ldots\alpha_n\in\Delta\}$

ヒンティッカ集合Δが充足可能であることを示すには, 任意の A∈Δに対して,

$$V_M(A)=1 \qquad (*1)$$

を示せばよい. A に現れる論理定項の個数を#(A)とし, #(A)についての数学的帰納法で, (*1)を示す.
(i) #(A)＝0, すなわち, $A=\Phi^n\alpha_1\ldots\alpha_n$のとき:
　(A1) $A=\Phi^n\alpha_1\ldots\alpha_n$ (仮定)
　(A2) A∈Δ (仮定)
　(A3) $\Phi^n\alpha_1\ldots\alpha_n\in\Delta$ (∵(A1),(A2))
　(A4) $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle\in V(\Phi^n)$ (∵(A3),(M3))
　(A5) $\langle V(\alpha_1),\ldots,V(\alpha_n)\rangle\in V(\Phi^n)$ (∵(A4),(M2))
　(A6) $V_M(\Phi^n\alpha_1\ldots\alpha_n)=1$ (∵(A5),定義 4.2(1))
　(A7) $V_M(A)=1$ (∵(A6),(A1))
(ii) #(A)>0 のとき:#(A*)<#(A)を満たす A*∈Δに対して, $V_M(A^*)=1$ と仮定する(帰納法の仮定). 以下 A の一番外側の論理定項の種類によって場合分けして示すが, 本稿では次の 2 つの場合のみを示す.
(ii-1) $A=\neg\Phi^n\alpha_1\ldots\alpha_n$のとき:
　(B1) $A=\neg\Phi^n\alpha_1\ldots\alpha_n$ (仮定)
　(B2) A∈Δ (仮定)
　(B3) $\neg\Phi^n\alpha_1\ldots\alpha_n\in\Delta$ (∵(B1),(B2))
　(B4) $\Phi^n\alpha_1\ldots\alpha_n\notin\Delta$ (定義 5.2(¬))
　(B5) $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle\notin V(\Phi^n)$ (∵(B4),(M3))
　(B6) $\langle V(\alpha_1),\ldots,V(\alpha_n)\rangle\notin V(\Phi^n)$ (∵(B5),(M2))
　(B7) $V_M(\Phi^n\alpha_1\ldots\alpha_n)=0$ (∵(B6),定義 4.2(1))
　(B8) $V_M(\neg\Phi^n\alpha_1\ldots\alpha_n)=1$ (∵(B7),定義 4.2(3))
　(B9) $V_M(A)=1$ (∵(B1),(B8))
(ii-2) A＝B∧C のとき:
　(C1) A＝B∧C (仮定)
　(C2) A∈Δ (仮定)
　(C3) B∈Δ かつ C∈Δ (∵(C2),定義 5.2(∧))
　(C4) #(B)<#(A),#(C)<#(A) (∵(C1))
　(C5) B, C は M で真 (∵(C3),(C4),帰納法の仮定)
　(C6) $V_M(A)=1$ (∵(C1),定義 4.2(2))

参考文献

[1] 戸田山和久:『論理学をつくる』. 名古屋大学出版会, 名古屋, 2000.