ブーメランの定理の証明の考察

2014SS082 鈴木 里奈
指導教員: 佐々木 克巳

1 はじめに

ブーメランの定理は，中学校の数学教育において，複数の証明を挙げる活動の題材として，よく用いられている定理である([3],[4]).

本研究の目的は，[1],[2]の考え方にもとづいて，この複数の証明をより一般的な形で表現し，そこから[3],[4]で紹介されている証明との関係や，[3],[4]とは別の見方による証明を考察することである．ここで，一般的な形とは，延長線と任意の 1 本の補助線を引く形と，各辺を平行移動する形の，2 つを扱った．本稿では前者の概要を示す．2 節で[3],[4]で扱っている中学校で学ぶ証明，3 節で一般化した証明の概要，4 節で証明が単純になる特別の場合を示し，2 節の証明との関係と，別の見方による証明を考察する．

2 中学校で学ぶ証明

この節では，[3],[4]にある証明の概要を述べる．

まず，ブーメランの定理を以下に示す．

定理 1.1 図 1 の四角形 ABCD において

$d=a+b+c$ である．

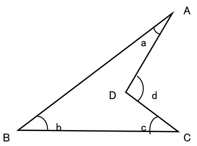

図 1:ブーメランの定理の図

[3],[4]で紹介されている証明のうち，任意の 1 本の補助線を引く場合に該当する図は 4 つあり，その証明を表す図を図 2 に示す．

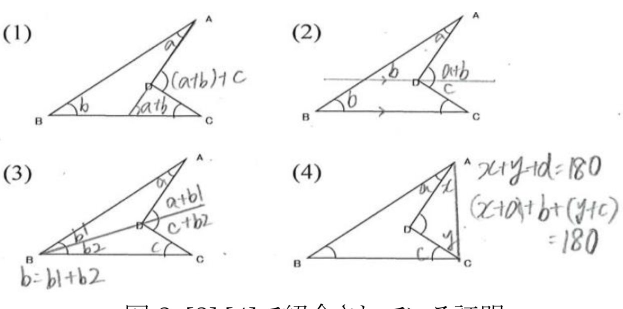

図 2:[3],[4]で紹介されている証明

図 2 で前提となっている性質は次の 3 つである．

- 対頂角の性質
- 平行線の性質
- 三角形の内角・外角の性質

図 2 は各辺の延長線の他に，任意に 1 本の補助線を引く形で一般化できる．

3 一般化した証明

この節では，[1],[2]にもとづいて，2 節の 4 つの証明を，各辺の延長線と任意の 1 本の補助線を用いる形に一般化した，証明の概要を示す．

証明の概要．次の 2 つのステップで証明する(本研究では直線の向きも考慮に入れて，より丁寧な証明を与えているが，本稿では，その部分を割愛している)．

ステップ 1 任意の補助線ℓを引き，次の 4 組の 3 角の関係をきちんと記述する．

(1.1)a，ℓと直線 AB のなす角，ℓと直線 DA のなす角．

(1.2)b，ℓと直線 BC のなす角，ℓと直線 AB のなす角．

(1.3)c，ℓと直線 CD のなす角，ℓと直線 BC のなす角．

(1.4)d，ℓと直線 DA のなす角，ℓと直線 CD のなす角．

ステップ 2 ステップ 1 の 4 組の関係から，a,b,c,d の関係，すなわち $a+b+c=d$ を導く．

(1.1)の関係の求め方は，ℓ,AB，DA で三角形ができる場合は，三角形の内角・外角の性質，ℓが AB または DA と平行のときは平行線の性質を用いてそれぞれ導ける．ℓが A を通るときは，図をかいて確認できる． (1.2),(1.3),(1.4)でも同様である．

4 3 節の証明が単純になる特別の場合

この節では，前節の証明が単純になるℓの位置を示し，2 節の証明との関係と，別の見方による証明を考察する．まず，そのℓの位置を示す．前節の(1.1)の求め方から，ℓ，AB，DA で三角形ができる場合よりも，それ以外の場合の方が，証明が単純になる．(1.2),(1.3),(1.4)も踏まえると

- ℓが(四角形の)各辺に平行な(または一致する)場合
- ℓが各頂点を通る場合

に証明が単純になる．この単純になる場合をまとめて表 1 に示す．比較のため，単純にならない場合も表に組み込んでおく．各場合の証明を表す図も表に組み込んでおく．

表 1 の各場合の証明と，2 節の 4 つの証明との関係は，参照する図を確認すれば読み取れるが，2 節の 4 つの証明はすべて，表 1 に現れていることがわかる．

次に，表 1 の各場合で，2 節の 4 つの証明とは別の見方による証明で，単純なものについて考察する．図 4 の説明は，それより単純な証明が，図 2 または図 3 に存在するので，単純とは言えない．すると，2 節とは別の見方の単純な証明は，本質的には，図 3 に表される 3 つということになる．ただし，図 2 の証明では，延長線も含めて補助線が 1 本であるのに対し，図 3 では，延長線の他に 1 本の補助線が必要であり，その意味では，図 2 の方が単純である．

表 1:単純になる場合

ℓの条件		証明を表す図
AB に平行または一致	A を通る (AB に一致)	図 2(1)と同様
	B を通る (AB に一致)	
	C を通る	図 3(1)
	D を通る	図 2(2)と同様
BC に平行または一致	A を通る	図 3(1)と同様
	B を通る (BC に一致)	図 2(1)
	C を通る (BC に一致)	
	D を通る	図 2(2)
CD に平行または一致	A を通る	図 3(2)
	B を通る	図 3(3)
	C を通る (CD に一致)	図 2(1)と同様
	D を通る (CD に一致)	
DA に平行または一致	A を通る (DA に一致)	図 2(1)と同様
	B を通る	図 3(3)と同様
	C を通る	図 3(2)と同様
	D を通る (DA に一致)	図 2(1)と同様
A, C を通る		図 2(4)
B, D を通る		図 2(3)
A を通る		図 4(1)
B を通る		図 4(2),(3),(4)
C を通る		図 4(5),(6)
D を通る		図 4(7),(8),(9)
頂点を通らず，平行でもない		図 4(10)

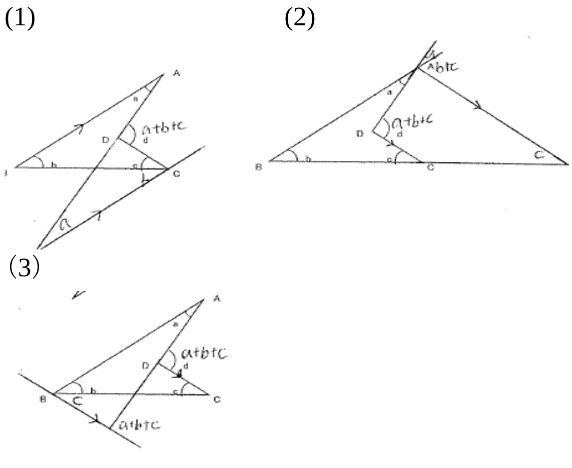

図 3:証明を表す図(1)

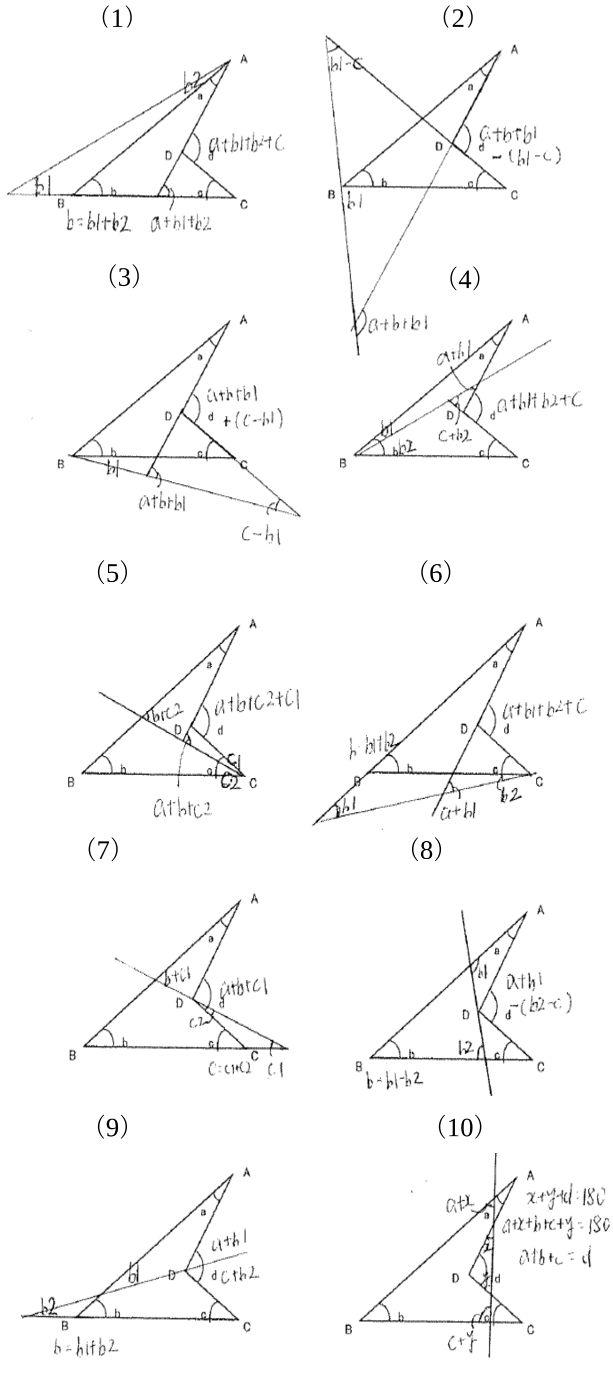

図 4:証明を表す図(2)

参考文献

[1] 佐々木克巳:「証明問題を発展的に考察する手法」2018 年度南山大学教員免許状更新講習資料

[2] 佐々木克巳:「2018 年度システム数理演習Ⅲ講義資料」，南山大学，2018

[3] 髙木徹:「中学校数学科授業・テストでそのまま使える！思考力がぐんぐん育つ良問 33 多様な考え方ができる問題の考え方を獲得できる」，明治図書出版，東京,2014

[4] 桁元新一郎:「中学校新数学科「数学的な表現力」を育成する授業モデル」，明治図書出版，東京，2009