

並列回転型倒立振子の製作と安定化制御

2015SC056 松島朱音 2015SC069 長崎嘉論

2015SC080 仙田岳大 2015SC092 竹田賢矢 2015SC094 竹中彩音

指導教員：坂本登 中島明

1 はじめに

これまでスライダー型や回転型の二重倒立振子など、劣駆動システムの制御を題材にした研究は盛んに行われており、様々な手法でその安定化制御が達成されている。劣駆動システムとは、システムのもつ自由度の数に対してアクチュエータの数が少ないシステムのことであり、より少ないアクチュエータでシステム全体の制御を実現することは、様々な産業において軽量化やエネルギー、コストの削減につながる事が考えられる [1]。

本研究では劣駆動システムである並列回転型倒立振子の安定化制御に取り組む。並列回転型倒立振子は一般的な回転型倒立振子と比べて非駆動関節の数が1つ多い上、強い非線形性をもつため、その安定化制御の実現は難しい課題である [5]。また、本研究では並列回転型倒立振子の安定化制御だけでなく、実験機の設計にも取り組む。実験機の設計に基づいた制御シミュレーションを行い、シミュレーション結果に応じて設計を変更して製作した実験機で安定化制御実験を行うという過程を経ることで、より深く制御工学を学ぶことを目指す。

2 実験機製作

2.1 概要

回転型倒立振子の実験機設計は本研究の大きな柱の一つである。実験機の基本構造はの山口氏の回転型倒立振子を参考にし、アーム部分を双腕にすることで並列回転型倒立振子とした。シミュレーションとの連携を円滑にするため、実験機が様々な実験に応用可能であり、部品組み換え及び調整・修理が容易にできるように設計を進めた。設計は3DCADソフトのSOLIDWORKSを用いて行い、部品加工は株式会社テクニカルサポートに依頼した。

2.2 製作の流れ

実験機を製作した流れを表1に示す。

2.3 構想設計

構想段階での設計は図1である。構想段階ではアーム両端に固定されたエンコーダに直接振子を固定するようになっている。

2.4 モータ・エンコーダの決定

モータとエンコーダは単振子の振り上げ安定化の実績のある山口氏の回転型倒立振子 [2] に用いられているものと同等または類似したスペックのものを選定した。

表1 製作の流れ

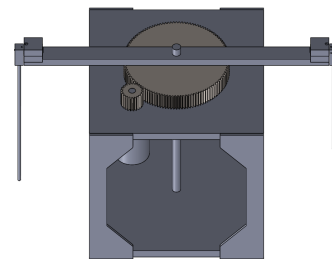
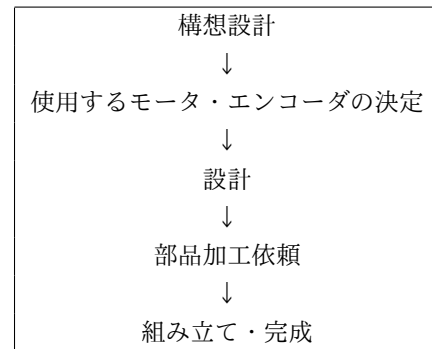


図1 構想設計

2.5 設計

決定したモータとエンコーダを組み込み完成した設計が図2である。材料は基本的に回転部分は軽いアルミ (A5052)、振子と台座部分については鉄 (S45C) とした。構想段階の図1とは異なり、エンコーダはアームの内側に固定され、振子の回転をベルトを介して読み取る形になっている。これは、エンコーダの軸に直接振子を取り付けるための部品の製作が困難であったこと、取り付ける振子の重量に対してエンコーダの軸の強度に不安があったことが要因である。結果的にはあるが、ベルト連結にしたことによりエンコーダの分解能がプリー径比分向上し、配線の取り回しも改善された。また、ギア径を構想設計のものより小さくしたと合わせてアーム部分の慣性モーメントを小さくすることができたため、より小さな入力電圧での制御が可能になった。アームと回転軸は負荷に強く取り外しの容易なキーを使った固定を採用した。振子の長さの変更をスムーズにするため、アームにはねじ穴を空け、そこにねじ切りをした振子を手回しでつけるようにした。

加工の詳細を詰めるため設計図をもとにテクニカルサポートと打合せを行ったところ、エンコーダの軸になる部

品が小さいため加工が困難であり十分な精度での製作が不可能であると判断された。そこで、本来の用途とは異なるがミスミの位置決めピン (SFPHSHH-D3-L11-P1.5-B10) をエンコーダの軸として代用することで解決した。また、ベルトのテンションを調整できる機構を組み込んだほうが良いというアドバイスを頂いたため、図 3 のようにエンコーダの取り付け位置を縦穴の範囲で上下に移動させることでベルトのテンションを変更できる機構を組み込んだ。

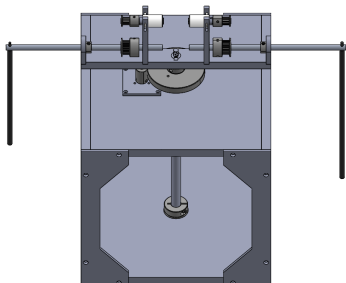


図 2 完成した設計

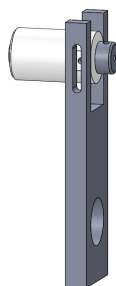


図 3 ベルトテンション調整機構

2.6 組み立て・完成

実際に製作した実験機は図 4 に示す。振子については全長 10[cm] から 40[cm] まで 5[cm] 刻みで計 7 本の製作を依頼した。

2.7 実験機の不具合

製作した実験機を用いて実験を進める中でいくつかの不具合が発生した。主な不具合はエンコーダの固定が緩い点、振子回転軸のベアリングがずれてしまう点、振子の軸ががたつく点、全長 10[cm] と 40[cm] の振子が実験に適さない点の 4 つである。これらは現時点では大きく実験に影響を与えていないと思われるが、今後より高度な実験を行う際には部品の再製作も必要になるだろう。

3 並列回転型倒立振子システムのモデル

本研究で使用する並列回転型倒立振子は、表 2 のパラメータを持つ実験機である。実験機は回転アーム、振子、

図 4 実際に製作された実験機

DC サーボモータ、マイクロエンコーダで構成されている。回転アームはギアを介して DC サーボモータに接続されており、電圧入力を DC サーボモータに与えることで回転軸を中心として水平面内を回転する。振子はアームの両端に取り付けられており、垂直平面内を自由に回転することができる。回転アームの回転角 ϕ はギアを介して DC サーボモータに内蔵されているエンコーダで観測し、振子の回転角 θ_1, θ_2 はベルトとプーリを介してマイクロエンコーダで観測する。

3.1 運動方程式の導出

並列回転型倒立振子システムを図 5 で示すモデルとして、Lagrange の運動方程式を導出する。まず、回転アームの回転軸と振子の回転軸との交点を原点とし、水平面方向に x 軸、 y 軸、鉛直方向に z 軸をとる。 ϕ, θ_1, θ_2 は反時計回り方向を正とする。以下の表 2 で各パラメータの定義をする。

2 本の振子の重心の座標 P_1, P_2 は以下のように表すことができる。

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_a \cos \phi - l_{p1} \sin \theta_1 \sin \phi \\ l_a \sin \phi + l_{p1} \sin \theta_1 \cos \phi \\ l_{p1} \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_a \cos \phi + l_{p2} \sin \theta_2 \sin \phi \\ -l_a \sin \phi - l_{p2} \sin \theta_2 \cos \phi \\ l_{p2} \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

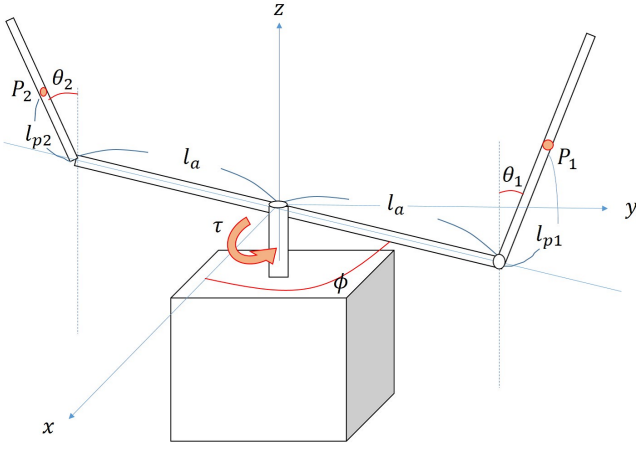


図5 並列回転型倒立振り子モデル

表2 並列回転型倒立振り子のパラメータ

記号	名称
J_a	回転アームの慣性モーメント
J_{p1}	振り子1の慣性モーメント
J_{p2}	振り子2の慣性モーメント
m_{p1}	振り子1の質量
m_{p2}	振り子2の質量
l_a	回転アームの長さ
l_{p1}	振り子1の回転中心から重心位置までの長さ
l_{p2}	振り子2の回転中心から重心位置までの長さ
b_a	回転アームの粘性摩擦係数
b_{p1}	振り子1の粘性摩擦係数
b_{p2}	振り子2の粘性摩擦係数
R_a	電気子抵抗
K_E	逆起電力定数
K_T	トルク定数
g	重力加速度
n	モータと回転アームのギア比

これらを時間について微分すると、

$$\dot{P}_1 = \begin{bmatrix} -l_a \dot{\phi} \sin \phi - l_{p1} (\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta_1 \cos \phi) \\ l_a \dot{\phi} \cos \phi + l_{p1} (\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta_1 \sin \phi) \\ -l_{p1} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\dot{P}_2 = \begin{bmatrix} l_a \dot{\phi} \sin \phi + l_{p2} (\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta_2 \cos \phi) \\ -l_a \dot{\phi} \cos \phi - l_{p2} (\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta_2 \sin \phi) \\ -l_{p2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

となる。システム全体の運動エネルギー T 、ポテンシャル

エネルギー U は、

$$T = \frac{1}{2} J_a \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (J_{p1} \dot{\theta}_1^2 + m_{p1} \dot{P}_1 \dot{P}_1^T) + \frac{1}{2} (J_{p2} \dot{\theta}_2^2 + m_{p2} \dot{P}_2 \dot{P}_2^T) \quad (5)$$

$$U = m_{p1} g l_{p1} \cos \theta_1 + m_{p2} g l_{p2} \cos \theta_2 \quad (6)$$

である。このとき、回転アームと振り子の粘性摩擦を考慮した Lagrange の運動方程式は、

$$\begin{aligned} & \dot{\theta}_1 (2r_1 \dot{\phi} \cos \theta_1 \sin \theta_1 - r_5 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1) + r_5 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ & + \dot{\theta}_2 (2r_2 \dot{\phi} \cos \theta_2 \sin \theta_2 - r_6 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) + r_6 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ & + \ddot{\phi} (r_{11} + r_1 \sin \theta_1^2 + r_2 \sin \theta_2^2) + b_a \dot{\phi} = \tau \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & r_9 \ddot{\theta}_1 - r_7 \sin \theta_1 - r_1 \dot{\phi}^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \\ & + r_5 \ddot{\phi} \cos \theta_1 + b_{p1} \dot{\theta}_1 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & r_{10} \ddot{\theta}_2 - r_8 \sin \theta_2 - r_2 \dot{\phi}^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ & + r_6 \ddot{\phi} \cos \theta_2 + b_{p2} \dot{\theta}_2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ただし、 r_1 から r_{11} までは以下のように置き換えた。

$$\begin{aligned} r_1 &= l_{p1}^2 m_{p1} & r_2 &= l_{p2}^2 m_{p2} & r_3 &= l_a^2 m_{p1} \\ r_4 &= l_a^2 m_{p2} & r_5 &= l_a l_{p1} m_{p1} & r_6 &= l_a l_{p2} m_{p2} \\ r_7 &= g l_{p1} m_{p1} & r_8 &= g l_{p2} m_{p2} & r_9 &= J_{p1} + r_1 \\ r_{10} &= J_{p2} + r_2 & r_{11} &= J_a + r_3 + r_4 \end{aligned}$$

また、倒立振り子実験機に搭載する DC サーボモータの伝達特性は、電圧入力を u とすると、

$$\tau = -\frac{n^2 K_T K_E}{R_a} \dot{\phi} + \frac{n K_T}{R_a} u \quad (10)$$

で表され、以降は

$$t_a = \frac{n^2 K_T K_E}{R_a} \quad t_b = \frac{n K_T}{R_a}$$

と置き換える。以上のことから、運動方程式は以下の形式で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} r_{11} + r_1 \sin^2 \theta_1 + r_2 \sin^2 \theta_2 & r_5 \cos \theta_1 & r_6 \cos \theta_2 \\ r_5 \cos \theta_1 & r_9 & 0 \\ r_6 \cos \theta_2 & 0 & r_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ただし、 R_1 から R_3 については以下のように置き換えた。

$$\begin{aligned} R_1 &= -\dot{\theta}_1 (2r_1 \dot{\phi} \cos \theta_1 \sin \theta_1 - r_5 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1) \\ & - \dot{\theta}_2 (2r_2 \dot{\phi} \cos \theta_2 \sin \theta_2 - r_6 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \\ & - (b_a + t_a) \dot{\phi} + t_b u \end{aligned}$$

$$R_2 = r_7 \sin \theta_1 + r_1 \dot{\phi}^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - b_{p1} \dot{\theta}_1$$

$$R_3 = r_8 \sin \theta_2 + r_2 \dot{\phi}^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 - b_{p2} \dot{\theta}_2$$

3.2 状態方程式の導出

システムの状態変数 x を

$$\begin{aligned} x(t) &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T \\ &= [\phi, \theta_1, \theta_2, \dot{\phi}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T \end{aligned} \quad (12)$$

とすると、システムは以下のように表すことができる。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (13)$$

ここで、

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \frac{r_9 r_{10} R_1 - r_5 r_{10} R_2 \cos \theta_2 - r_6 r_9 R_3 \cos \theta_2}{D_1} \\ \frac{R_2 f_1 + r_5 r_6 R_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - r_5 r_{10} R_1 \cos \theta_1}{D_1} \\ \frac{R_3 f_1 + r_5 r_6 R_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - r_6 r_9 R_1 \cos \theta_2}{D_1} \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{r_9 r_{10} t_b}{D_1} \\ \frac{-r_5 r_{10} t_b \cos \theta_1}{D_1} \\ \frac{-r_6 r_9 t_b \cos \theta_2}{D_1} \end{bmatrix}$$

である。ただし、 f_1 と f_2 、 D_1 について、以下のように置き換えた。

$$\begin{aligned} f_1 &= r_{10}(r_{11} + r_1 \sin^2 \theta_1 + r_2 \sin^2 \theta_2) - r_6^2 \cos^2 \theta_2 \\ f_2 &= r_9(r_{11} + r_1 \sin^2 \theta_1 + r_2 \sin^2 \theta_2) - r_5^2 \cos^2 \theta_1 \\ D_1 &= r_9 r_{10}(r_{11} + r_1 \sin^2 \theta_1 + r_2 \sin^2 \theta_2) \\ &\quad - r_9 r_6^2 \cos^2 \theta_2 - r_{10} r_5^2 \cos^2 \theta_1 \end{aligned}$$

さらに、上式を $x = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ 周りで線形化すると、

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (14)$$

が得られる。ここで、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ M_1 & M_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{r_9 r_{10} t_b}{D_2} \\ \frac{-r_5 r_{10} t_b}{D_2} \\ \frac{-r_6 r_9 t_b}{D_2} \end{bmatrix}$$

である。ただし、

$$\begin{aligned} M_1 &= D_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -r_5 r_7 r_{10} & -r_6 r_8 r_9 \\ 0 & -r_7 r_{12} & -r_5 r_6 r_8 \\ 0 & -r_5 r_6 r_8 & -r_8 r_{13} \end{bmatrix} \\ M_2 &= D_2^{-1} \begin{bmatrix} r_9 r_{10}(b_a + t_a) & b_{p1} r_5 r_{10} & b_{p1} r_5 r_9 \\ r_5 r_{10}(b_a + t_a) & -b_{p1} r_{12} & -b_{p2} r_5 r_6 \\ r_6 r_9(b_a + t_a) & -b_{p1} r_5 r_6 & -b_{p2} r_{13} \end{bmatrix} \\ r_{12} &= -r_6^2 + r_{10} r_{11} \\ r_{13} &= -r_5^2 + r_9 r_{11} \\ D_2 &= r_{11}(r_1 r_2 + J_{p1} J_{p2} + J_{p1} r_2 + J_{p2} r_1) \\ &\quad - r_6^2 r_9 - r_5^2 r_{10} \end{aligned}$$

とした。

4 パラメータ同定

ここでは、並列回転型倒立振子のパラメータ同定について説明する。

4.1 実験方法

慣性モーメントは理論的に求めることも可能だが、アームや振子の形状は一律な棒ではないので、アームおよび振子の慣性モーメントの理論値と実際の値には誤差が生じる。また、粘性摩擦係数は実験的にのみ得ることが出来る。そのため、未知パラメータをアームの慣性モーメントと粘性摩擦係数、各振子の慣性モーメントと粘性摩擦係数の計6個とした。

同定方法は同時同定法を、計算方法は最小二乗法を用いる [6]。

実験方法は下記の三つの方法である。

(1) アームの慣性モーメント J_a と粘性摩擦係数 b_a の同定実験

振子を取り外し、アームに正弦波入力を印加してアームの角度を測定する。測定したアームの角度データを用いてアームの慣性モーメント J_a と粘性摩擦係数 b_a の2つの未知パラメータをアームのみのモデルから同定する。

(2) 各振子の慣性モーメント r_9 、 r_{10} と粘性摩擦係数 b_{p1} 、 b_{p2} の同定実験

アームと台座を取り外し、振子を振り上げた状態から自由応答させて振子の角度を測定する。測定した振子の角度データを用いて振子の慣性モーメント r_s と粘性摩擦係数 b_{pk} の2つの未知パラメータを振子のみのモデルから同定する。 ($s = 9, 10; k = 1, 2$)

(3) アームと各振子の慣性モーメント J_a 、 r_9 、 r_{10} と粘性摩擦係数 b_a 、 b_{p1} 、 b_{p2} の同定実験

アームに振子を取り付けたままアームに正弦波入力を印加し、アームと振子の各角度を測定する。測定した角度データを用いて実験機全体のモデルから同定を行う。

4.2 検証方法

この実験で得られた各未知パラメータの同定値の検証は三つの方法で行う。一つ目は、それぞれの実験方法で得られた未知パラメータの各同定値の比較である。二つ目は、CAD から得られる値との比較である。三つ目は、同定されたパラメータを用いたシミュレーションで得られる応答と、実験により得られた応答を比較する方法である。

4.3 実験機を用いた同定

この節では、並列回転型倒立振子の実験機を用いたパラメータ同定について説明する。

4.3.1 アームの慣性モーメント J_a と粘性摩擦係数 b_a の同定実験

アームの未知パラメータを慣性モーメント J_a と粘性摩擦係数 b_a とし、振子を取り外した状態でアームに正弦波入力を印加してパラメータ同定を行う。アームのみの運動方程式は次の式 (15) である。

$$J_a \ddot{\phi} + b_a \dot{\phi} = nK_{dc}u \quad (15)$$

この式に対し最小二乗法を用いると、各未知パラメータを同時に求めることが出来る。しかし、実験機に使用しているエンコーダでは角速度、角加速度を測定できない。そのため、角度の一階、二階の疑似微分を得る必要がある。角度の中心差分を取り、伝達関数を適用してこれらを得る。 $h(t) = [\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, u]^T$ とし、これをラプラス変換して

$$H_i(s) = \mathcal{L}[h_i(t)] \quad (i = 1, 2, \dots, 7)$$

とし、これに伝達関数 $F(s)$ を適用して、

$$\tilde{H}_i(s) = F(s)H_i(s) \quad (i = 1, 2, \dots, 7)$$

とする。さらにこれを逆ラプラス変換して、

$$\tilde{h}_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{H}_i(s)] \quad (i = 1, 2, \dots, 7)$$

とする。(15) 式を用いてこの伝達関数を適用すると、

$$J_a \tilde{h}_3(t) + b_a \tilde{h}_2(t) = nK_{dc} \tilde{h}_7(t) \quad (16)$$

となる。また、式 (16) は次のように表せる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_3(t) & \tilde{h}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ b_a \end{bmatrix} = nK_{dc} \tilde{h}_7(t) \quad (17)$$

この式から R, ψ, Z を、

$$R = \begin{bmatrix} \tilde{h}_3(t) & \tilde{h}_2(t) \end{bmatrix}, \psi = \begin{bmatrix} J_a \\ b_a \end{bmatrix}, Z = nK_{dc} \tilde{h}_7(t) \quad (18)$$

とおくと最小二乗法より、同定する未知パラメータの値が、

$$\psi = (R^T R)^{-1} R^T Z \quad (19)$$

と得られる。

アームに印加する正弦波入力の周波数を変更し 9 回の実験を行い、その平均値を未知パラメータの同定値とする。実験の結果を表 3 に示す。

この結果から、アームの慣性モーメントの同定値は $7.03 \times 10^{-3} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$ 、粘性摩擦係数の同定値は、 $5.32 \times 10^{-2} [\text{N} \cdot \text{s}/\text{rad}]$ と得られた。また CAD によるアームの慣性モーメント J_a の算出値は $9.467 \times 10^{-3} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$ と得られ、実験との相対誤差率は 25.8[%] であった。

また実験から得られたアームの角度の応答と実験から得られた同定値を用いたシミュレーションによる応答との比較検証を図 6 に示す。

検証結果から、CAD による算出値との相対誤差率や、シミュレーションの応答との差が比較的大きい結果が得られた。この原因の一つとして、モータの性質の問題が挙げられる。図 6 で示されている通り、モータに正弦波入力を印加すると正の方向にずれている。この現象が相対誤差率の大きさや、実験とシミュレーションとの応答の違いに現れたと考えられる。

しかし 9 回の実験の結果、慣性モーメント J_a の同定値の標準偏差が 5.08×10^{-4} 、粘性摩擦係数 b_a の同定値の標準偏差が 7.46×10^{-3} となり、実験毎に大きな同定値の差は見られなかったため、この平均値を制御則設計に用いた。

表 3 アームの同定結果

回数	入力 [V]	J_a 同定値 [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]	b_a 同定値 [$\text{N} \cdot \text{s}/\text{rad}$]
1	$\sin \pi t$	6.49×10^{-3}	4.55×10^{-2}
2	$\sin 2\pi t$	7.75×10^{-3}	6.50×10^{-2}
3	$\sin 2\pi t$	6.73×10^{-3}	4.85×10^{-2}
4	$\sin 2\pi t$	6.69×10^{-3}	4.92×10^{-2}
5	$\sin 2\pi t$	6.65×10^{-3}	4.90×10^{-2}
6	$\sin 4\pi t$	7.03×10^{-3}	5.35×10^{-2}
7	$\sin 4\pi t$	6.67×10^{-3}	5.00×10^{-2}
8	$\sin 4\pi t$	7.18×10^{-3}	4.99×10^{-2}
9	$\sin 6\pi t$	8.04×10^{-3}	6.82×10^{-2}
平均値		7.03×10^{-3}	5.32×10^{-2}

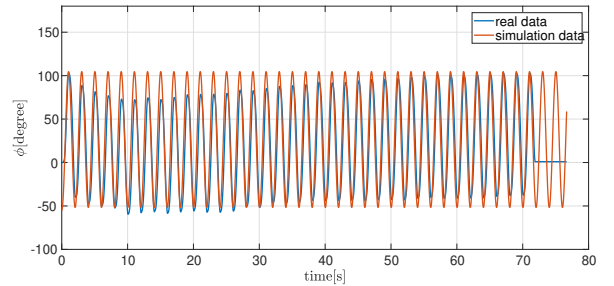


図 6 アームの応答の比較検証

4.3.2 各振子の慣性モーメント r_9, r_{10} と粘性摩擦係数 b_{p1}, b_{p2} の同定実験

振子 1 の未知パラメータを r_9, b_{p1} とし、振子 1 のみを自由応答させてその角度を計測する。得られた振子 1 の角度データを用いて同定を行う。

$$r_9 \ddot{\theta} - r_7 \sin \theta + b_{p1} \dot{\theta} = 0 \quad (20)$$

式 (20) を用いて同様に伝達関数を適用すると、

$$r_9 \tilde{h}_6(t) + b_{p1} \tilde{h}_5(t) = r_7 \sin \tilde{h}_4(t) \quad (21)$$

となる。また、式 (21) は次のように表せる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_6(t) & \tilde{h}_5(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_9 \\ b_{p1} \end{bmatrix} = r_7 \sin \tilde{h}_4(t) \quad (22)$$

この式から R, ψ, Z を,

$$R = \begin{bmatrix} \tilde{h}_6(t) & \tilde{h}_5(t) \end{bmatrix}, \psi = \begin{bmatrix} r_9 \\ b_{p1} \end{bmatrix}, Z = r_7 \sin \tilde{h}_4(t) \quad (23)$$

とし、最小二乗法から同定する未知パラメータを求める。各長さの振子の初期値を変更し各3回実験を行い、その平均値を同定値とする。同定結果は表4に示す。慣性モーメント r_9 に関してはCADによる算出値と、その算出値と実験から得られた同定値との相対誤差率を載せている。

実験結果から、慣性モーメント r_9 はCADによる算出値との比較検証で、全長10[cm]以外の振子で相対誤差率が2[%]前後となった。全長10[cm]の振子で、CADによる算出値との相対誤差率が12.6[%]となった。その原因として実験機のがた等があげられる。

表4 各振子の慣性モーメントの同定結果

長さ[cm]	r_9 算出値 [kg·m ²]	同定値 [kg·m ²]	誤差[%]	b_{p1} 同定値 [N·s/rad]
40	3.10×10^{-3}	3.16×10^{-3}	1.83	4.87×10^{-4}
35	2.06×10^{-3}	2.11×10^{-3}	2.19	5.50×10^{-4}
30	1.28×10^{-3}	1.31×10^{-3}	1.67	3.94×10^{-4}
25	7.33×10^{-4}	7.34×10^{-4}	0.15	3.35×10^{-4}
20	3.67×10^{-4}	3.73×10^{-4}	1.69	3.48×10^{-4}
15	1.49×10^{-4}	1.48×10^{-4}	0.83	2.42×10^{-4}
10	4.12×10^{-5}	3.60×10^{-5}	12.6	1.10×10^{-4}

また、実験から得られた振子の自由応答と同定値を用いたシミュレーションによる振子の自由応答との比較を図7～図9に示す。全長10[cm]の振子ではシミュレーションの方が実験よりも応答の収束が遅くなっている。この原因としては、クーロン摩擦などのモデルに考慮していない外力の影響が考えられる。全長40[cm]の振子では、シミュレーションの方が実験よりも応答の収束が早くなっている。この原因は現在調査中である。全長20[cm], 25[cm], 30[cm], 35[cm]の振子は、シミュレーションと実験データでズレが少ないと考えられる。

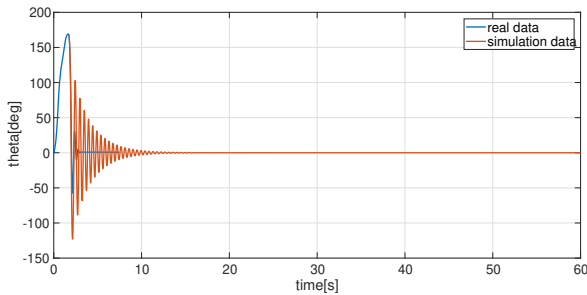


図7 全長10[cm]の振子の応答の比較

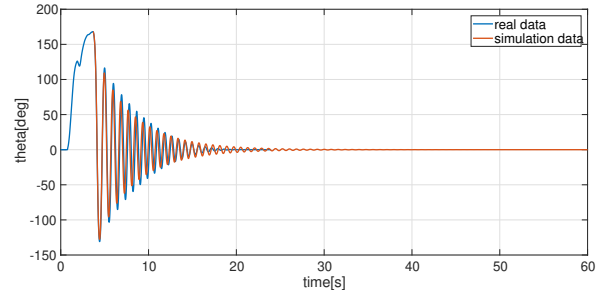


図8 全長25[cm]の振子の応答の比較

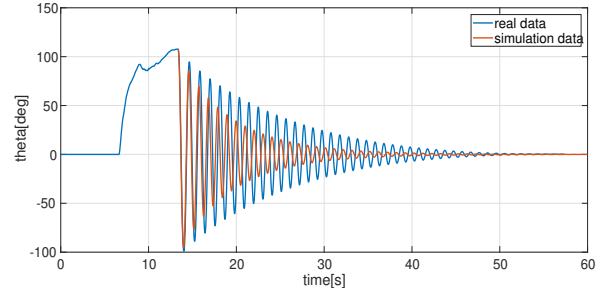


図9 全長40[cm]の振子の応答の比較

粘性摩擦係数が振子の長さ毎に異なる原因は、応答が一致するような複数の未知パラメータを同時に決定する計算手法に起因すると考えている。このため、粘性摩擦係数は各長さの振子毎に得られた同定値の平均を取るのではなく、それぞれの長さの振子で得られた同定値を用いた。

以上の実験結果から全長20[cm]～35[cm]の4本の振子の慣性モーメント r_9 と粘性摩擦係数 b_{p1} の同定値が信頼できるものであると考える。

4.3.3 アームと各振子の慣性モーメント J_a, r_9, r_{10} と粘性摩擦係数 b_a, b_{p1}, b_{p2} の同定実験

未知パラメータを $J_a, r_9, r_{10}, b_a, b_{p1}, b_{p2}$ とし、アームに2本の振子を取り付けた状態でアームに正弦波入力を印加してパラメータ同定を行う。前章で示した運動方程式をまとめると、

$$\begin{aligned} & J_a \ddot{\phi} + r_9 (\ddot{\phi} \sin^2 \theta_1 + 2 \dot{\phi} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1) \\ & + r_{10} (\ddot{\phi} \sin^2 \theta_2 + 2 \dot{\phi} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2) + b_a \dot{\phi} \\ & = t_b u - t_a \dot{\phi} + r_5 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + r_6 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - (r_3 + r_4) \ddot{\phi} \\ & - r_5 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - r_6 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & r_9 (\ddot{\theta}_1 - \dot{\phi}^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1) + b_{p1} \dot{\theta}_1 \\ & = r_7 \sin \theta_1 - r_5 \ddot{\phi} \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & r_{10} (\ddot{\theta}_2 - \dot{\phi}^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2) + b_{p2} \dot{\theta}_2 \\ & = r_8 \sin \theta_2 - r_6 \ddot{\phi} \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (26)$$

と得られる．式 (24)～(26) を用いて同様に伝達関数を適用すると、

$$\begin{aligned} & J_a \tilde{h}_3(t) + r_9 (\tilde{h}_3(t) \sin^2 \theta_1 + 2\tilde{h}_2(t) \tilde{h}_5(t) \sin(\tilde{h}_4(t)) \cos(\tilde{h}_4(t))) \\ & + r_{10} (\tilde{h}_3(t) \sin^2 \theta_2 + 2\tilde{h}_2(t) \tilde{h}_8(t) \sin(\tilde{h}_7(t)) \cos(\tilde{h}_7(t))) + b_a \tilde{h}_2(t) \\ & = t_b u - t_a \tilde{h}_2(t) + r_5 \tilde{h}_5(t)^2 \sin(\tilde{h}_4(t)) + r_6 \tilde{h}_8(t)^2 \sin(\tilde{h}_7(t)) \\ & - (r_3 + r_4) \tilde{h}_3(t) - r_5 \tilde{h}_6(t) \cos(\tilde{h}_4(t)) - r_6 \tilde{h}_9(t) \cos(\tilde{h}_7(t)) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & r_9 (\tilde{h}_6(t) - \tilde{h}_2(t)^2 \sin(\tilde{h}_4(t)) \cos(\tilde{h}_4(t))) + b_{p1} \tilde{h}_5(t) \\ & = r_7 \sin(\tilde{h}_4(t)) - r_5 \tilde{h}_3(t) \cos(\tilde{h}_4(t)) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & r_{10} (\tilde{h}_9(t) - \tilde{h}_2(t)^2 \sin(\tilde{h}_7(t)) \cos(\tilde{h}_7(t))) + b_{p2} \tilde{h}_8(t) \\ & = r_8 \sin(\tilde{h}_7(t)) - r_6 \tilde{h}_3(t) \cos(\tilde{h}_7(t)) \end{aligned} \quad (29)$$

となる．また、式 (27)～式 (29) は次のように表せる．

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \tilde{h}_3(t) & R_{12}(t) & R_{13}(t) & \tilde{h}_2(t) & 0 & 0 \\ 0 & R_{22}(t) & 0 & 0 & \tilde{h}_5(t) & 0 \\ 0 & 0 & R_{33}(t) & 0 & 0 & \tilde{h}_8(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ r_9 \\ r_{10} \\ b_a \\ b_{p1} \\ b_{p2} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} Z_1(t) \\ r_7 \sin(\tilde{h}_4(t)) - r_5 \tilde{h}_3(t) \cos(\tilde{h}_4(t)) \\ r_8 \sin(\tilde{h}_7(t)) - r_6 \tilde{h}_3(t) \cos(\tilde{h}_7(t)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで、 R, ψ, Z を

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} \tilde{h}_3(t) & R_{12}(t) & R_{13}(t) & \tilde{h}_2(t) & 0 & 0 \\ 0 & R_{22}(t) & 0 & 0 & \tilde{h}_5(t) & 0 \\ 0 & 0 & R_{33}(t) & 0 & 0 & \tilde{h}_8(t) \end{bmatrix}, \\ \psi &= \begin{bmatrix} J_a \\ r_9 \\ r_{10} \\ b_a \\ b_{p1} \\ b_{p2} \end{bmatrix}, \\ Z &= \begin{bmatrix} Z_1(t) \\ r_7 \sin(\tilde{h}_4(t)) - r_5 \tilde{h}_3(t) \cos(\tilde{h}_4(t)) \\ r_8 \sin(\tilde{h}_7(t)) - r_6 \tilde{h}_3(t) \cos(\tilde{h}_7(t)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

とし、最小二乗法から同定する未知パラメータを求める．ただし、

$$\begin{aligned} R_{12}(t) &= \tilde{h}_3(t) \sin^2(\tilde{h}_4(t)) \\ & \quad + 2\tilde{h}_2(t) \tilde{h}_5(t) \sin(\tilde{h}_4(t)) \cos(\tilde{h}_4(t)) \\ R_{13}(t) &= \tilde{h}_3(t) \sin^2(\tilde{h}_7(t)) \\ & \quad + 2\tilde{h}_2(t) \tilde{h}_8(t) \sin(\tilde{h}_7(t)) \cos(\tilde{h}_7(t)) \\ R_{22}(t) &= \tilde{h}_6(t) - \tilde{h}_2(t) \sin(\tilde{h}_4(t)) \cos(\tilde{h}_4(t)) \\ R_{33}(t) &= \tilde{h}_9(t) - \tilde{h}_2(t) \sin(\tilde{h}_7(t)) \cos(\tilde{h}_7(t)) \\ Z_1(t) &= t_b u - t_a \tilde{h}_2(t) + r_5 \tilde{h}_5(t)^2 \sin(\tilde{h}_4(t)) \\ & \quad + r_6 \tilde{h}_8(t)^2 \sin(\tilde{h}_7(t)) - (r_3 + r_4) \tilde{h}_3(t) \end{aligned}$$

とする．

振り子 1 に全長 35[cm]、振り子 2 に全長 20[cm] の振り子を取り付けて、実験毎に周波数の異なる正弦波入力を印加し、5 回の同定実験を行った．実験結果では、慣性モーメントや粘性摩擦係数の同定値が負の値を取るという問題が発生した．原因としてアームのみの同定実験と同様に、モータの性質により正弦波入力を印加するとアームが正の方向にずれてしまうという点が挙げられる．またもう一つ考えられる原因として、同時同定法の性質上必ずしも真値を同定するわけではないという点が挙げられる．このため、実験機全体のモデルを用いて同定実験を行うことは容易ではないと考えられる．以上から、未知パラメータは本章で示している 3 つの実験方法での同定値を制御実験で用いた．

5 並列回転倒立振子の安定化制御

並列回転型倒立振子システムでは、二つの振り子の固有振動数が異なれば理論的に可制御であり、これが一致すれば不可制御であることが知られている [3][4]．本節では可制御性行列と特異値分解を用いてこれを検証する．また、本研究では線形最適制御による安定化を行う．設計した制御則を用いたシミュレーションを行い、安定化が可能であることを確認した．

5.1 並列回転型倒立振子システムの解析

前述の並列回転型倒立振子に対して、可制御性行列と特異値の観点から解析を行う．

5.1.1 可制御性行列と特異値

一般的に可制御性行列 M_c は、そのランクによってシステムの可制御性を判断するのに用いられる．式 (14) より、システムの可制御性行列は、

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \cdots A^5B] \quad (30)$$

と表せる．この式がフルランクであればシステムは可制御である．ここでは、特異値が行列のランクの数だけ存在することを利用して最小特異値 $\underline{\sigma}(M_c)$ から可制御性を判断する．システムの特異値分解は

$$A = U \Sigma V \quad (31)$$

と表される． U, V は直交行列である． Σ の対角成分で非ゼロのものが特異値である． Σ の対角成分はシステムの次数だけ存在するため、これにゼロが現れればシステムは不可制御である．

5.1.2 解析結果

前小節で述べた性質を利用して並列回転型倒立振子の可制御性を検証する．振り子の長さを変化させて Σ の対角成分の最小値をプロットしたものが次の図 10 である．

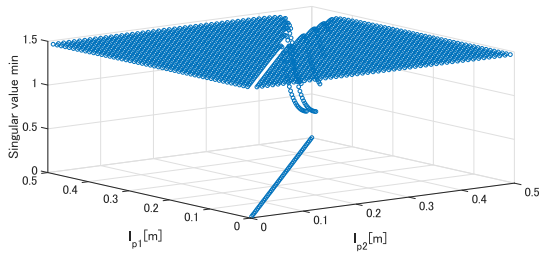


図10 解析結果

図10からわかる通り、 l_{p1} と l_{p2} が同じ長さになったとき Σ の最小成分が0となり、可制御性行列がフルランクでなくなる。それ以外では対角成分が非0であるため可制御であると考えられる。

5.2 実験機の物理パラメータ

前章で推定した値などを含めた、実験機のパラメータを表5示す。

表5 実験機の物理パラメータ

記号	値
J_a	$7.03 \times 10^{-3} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
J_{p1}	$7.34 \times 10^{-4} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
J_{p2}	$2.11 \times 10^{-3} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
m_{p1}	0.03[kg]
m_{p2}	0.053[kg]
l_a	0.175[m]
l_{p1}	0.1[m]
l_{p2}	0.175[m]
b_a	$5.32 \times 10^{-2} [\text{N} \cdot \text{s}/\text{rad}]$
b_{p1}	$3.48 \times 10^{-4} [\text{N} \cdot \text{s}/\text{rad}]$
b_{p2}	$5.50 \times 10^{-4} [\text{N} \cdot \text{s}/\text{rad}]$
R_a	0.165[kg · m ²]
K_E	0.1179[kg · m ²]
K_T	$19.5 \times 10^{-3} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
g	9.8[m/s ²]
n	1 : 5

5.3 線形最適レギュレータの設計

ここでは、並列回転型倒立振子の安定化制御を線形最適制御問題と考え、線形最適状態フィードバックによって安定化の達成を図る。線形最適状態フィードバックは、評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, Q \geq, R > 0 \quad (32)$$

に対する Riccati 方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T + Q = 0 \quad (33)$$

の解 P を用いて構成される。式 (33) の解を求め、線形最適状態フィードバック則が

$$u = -Kx = -R^{-1}B^T P x \quad (34)$$

と得られる。

評価関数の重み行列 Q , R は以下のように選ぶ。

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, R = 8 \quad (35)$$

5.4 非線形モデルでのシミュレーション結果

図11, 12は、本節で求めた制御器による非線形モデルに対するシミュレーション結果である。倒立状態近傍の初期状態 $x(0) = [0, \frac{10\pi}{180}, \frac{10\pi}{180}, 0, 0, 0]$ [rad] から各状態が原点に収束している。過電流防止のため電圧飽和を15[V]に指定している。図12より、制御入力の実験可能な範囲である。

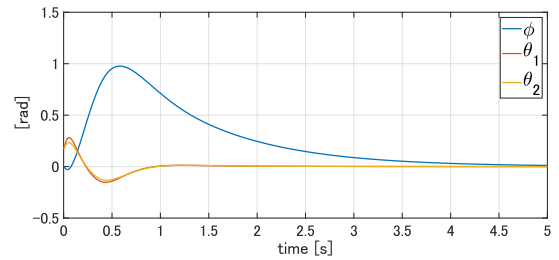


図11 ϕ, θ_1, θ_2 のシミュレーション結果

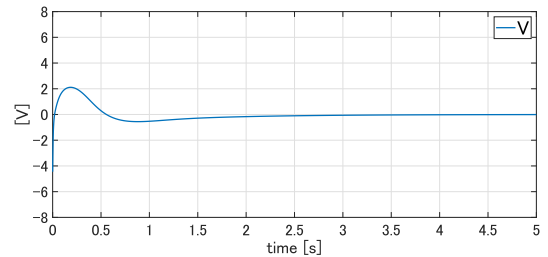


図12 入力電圧のシミュレーション結果

5.5 線形最適レギュレータとオブザーバの併合系

実験を行う際、サンプリングタイムは1.0[ms]とし、アームと振子の角度はロータリエンコーダで測定することを想定している。状態フィードバックを行うにあたり、 $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ の値を観測する必要があるが、これらの値は直接観測することができないため、オブザーバを設計することで、 $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ を得る。

5.5.1 双対システム

エンコーダから得られるのはアーム，振子の角度のみであるため行列 C を次のように定義する．

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

式 (14) より線形システムの状態方程式は次のように表される．

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (37)$$

この双対システムは

$$\begin{cases} \dot{z} = A^T z + C^T v \\ w = B^T z \end{cases} \quad (38)$$

と得られる．

5.5.2 オブザーバの設計

オブザーバの変数を次のように表す．

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\phi} & \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \dot{\hat{\phi}} & \dot{\hat{\theta}}_1 & \dot{\hat{\theta}}_2 \end{bmatrix}^T \quad (39)$$

双対システム上で線形最適レギュレータを設計する．実システムの状態空間表現は次に示す．ただし， L はオブザーバゲインである．

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (40)$$

前小節で求めた双対システムに対して線形最適制御を適用すると，評価関数は

$$J_o = \int_0^{\infty} (z^T Q_o z + v^T R_o v) dt, Q_o \geq, R_o > 0 \quad (41)$$

で表される．前節同様に Riccati 方程式を解くことで，状態フィードバックゲイン形式のコントローラ

$$v = K_o z \quad (42)$$

を設計して双対システムの状態フィードバックゲイン K_o を求める．オブザーバゲイン L は次式で与えられる．

$$L = -K_o^T \quad (43)$$

5.5.3 非線形モデルでのシミュレーション結果

図 13~16 は線形最適レギュレータとオブザーバを併合した制御機による非線形モデルに対してのシミュレーション結果である．初期状態は前節と同じく $x(0) = [0, \frac{10\pi}{180}, \frac{10\pi}{180}, 0, 0, 0]$ [rad] であり，オブザーバの初期値は $\hat{x}(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$ [rad] としている．前節同様に安定化が達成されている．しかし，角速度を完全に推定するまでに 1[s] 程度かかっており実用上問題があると考えられる．

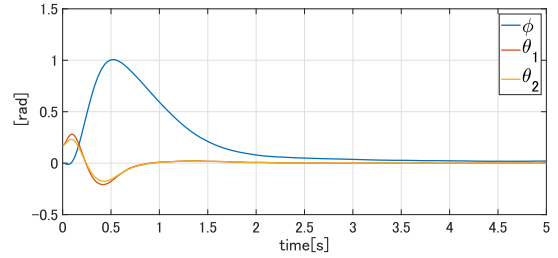


図 13 ϕ, θ_1, θ_2 のシミュレーション結果

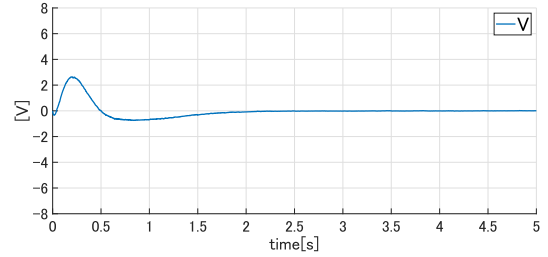


図 14 入力電圧のシミュレーション結果

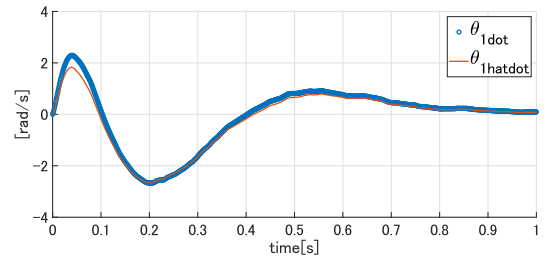


図 15 $\dot{\theta}_1$ のシミュレーション結果

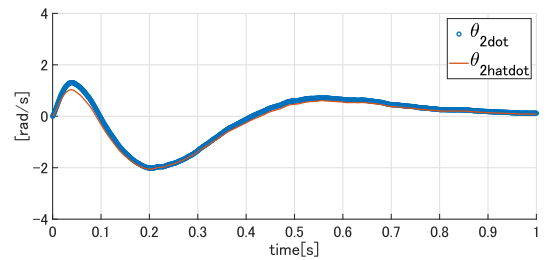


図 16 $\dot{\theta}_2$ のシミュレーション結果

6 実験

実験機が設計通りに機能するかを確認するために，単独の倒立振子の安定化を初めに行った．単独の倒立振子の安定化実験で用いたモデルと制御器は [2] を参考に作成した．

その後，設計した制御器を用いて並列回転型倒立振子の安定化実験を行った．サンプリングタイムはどちらの実験でも 1[ms] である．

6.1 擬似微分器

本実験ではオブザーバは使用せず，角速度はローパスフィルタ付き擬似微分器

$$F(s) = \frac{62.38s}{s + 62.38} \quad (44)$$

を用いて取得した．ローパスフィルタのカットオフ周波数は 10[Hz] である．

6.2 単独の倒立振子の安定化実験

まず初めに，線形最適レギュレータによる振子 2 の安定化実験を行った．実験結果を次の図 17，図 18 に示す．振子が倒立状態を維持し，安定化が達成されていることが確認できる．入力電圧が小さく振動しているのはアームが持つ不感帯の影響と考えられる．以上から，実験機は十分に実用に足ると判断した．

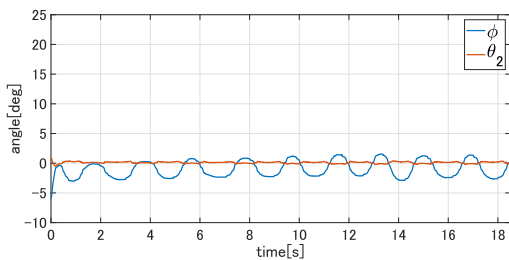


図 17 角度の実験結果

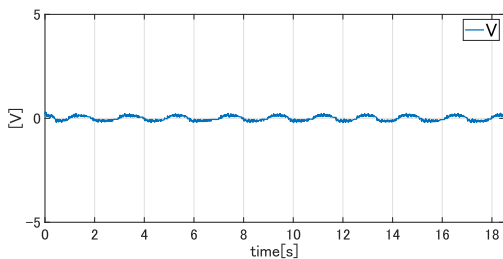


図 18 入力電圧の実験結果

6.3 並列回転型倒立振子の安定化実験

設計した線形最適レギュレータを用いて安定化実験を行った．最も倒立状態の良好な実験結果を次の図 19，図 20 に示す．振子に細かい振動が見られるが，倒立状態を維持している．この振動はクーロン摩擦，あるいはアームが持つ不感帯の影響であると考えられる [3]．これによりシミュレーション上で設計した制御器では振子の角度に対して感度が高く，過大な入力が入可される傾向が見られた．試行錯誤により，線形最適レギュレータのゲインを前節のものより小さくなるよう設計することで良好な結果が得られた．実験結果より，設計した実験機は倒立振子を題材とした研究に十分有用であると考えられる．

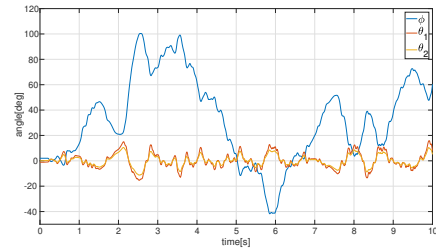


図 19 角度の実験結果

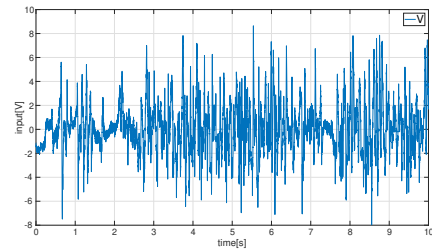


図 20 入力電圧の実験結果

7 おわりに

本稿では並列回転型倒立振子実機の設計，製作，並列回転型倒立振子システムのモデリング，システム同定および安定化シミュレーションと実機を用いた実験について説明した．並列型の倒立振子は直列の二重倒立振子よりも制御難度が高く，制御則の有用性を確認する上で興味深い題材である．本稿内では並列回転型倒立振子の倒立状態維持を達成した．実験結果から，設計・製作した実験機が研究するうえで実用に足ると考えられる．今後は実験機と実験環境の修正を行い，より扱いやすい実験機に仕上げていくとともに，制御器のチューニングを行う．その後，振り上げ安定化の制御器開発を行いたいと考えている．

参考文献

- [1] 田中征治：回転型振子の振り上げ・安定化制御に関する研究，岡山県立大学，2014．
- [2] 山口恭輔：柔軟性を有する非線形メカニカルシステムの制御に関する研究，名古屋大学，2014．
- [3] 杉江俊治・岡田昌史：並列倒立振子システムの H^∞ 制御．システム制御情報学会論文誌 Vol.6, 1993．
- [4] T.Kailath：Linear Systems, Prentice-Hall, pp.103~105, 1980．
- [5] 川谷亮治・山口尊志：並列型 2 重倒立振子系の解析とその安定化，計測自動制御学会論文集 Vol29, 1993．
- [6] 白石高章：『統計科学の基礎：データと確率の結びつきがよくわかる数理』．日本評論社，2012．