高校数学における微積分について
—直観的理解と厳密性の葛藤—

2015SS089 山本有哉
指導教員：小藤俊幸

1　はじめに

大学数学での微分積分学を学習するにあたって高校数学の微分積分への理解度が大きく影響すると考える．数学 III での微分積分は一変数関数の微分積分が主である．単に公式や計算の手法を覚えるという理解ではなく，図形的な考え方や原理を理解することで大学数学での多変数関数の微分積分への接続が容易になると考える．

本研究では高校数学の教科書での証明を扱って数学教育について検討していく．

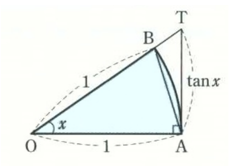
2　三角関数と微分積分

三角関数の微分積分に関連した公式として $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限を扱う．

2.1　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

証明

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき, 半径が 1,
中心角 x ラジアンの扇形
OAB の点 A における円の接線
と直線 OB の交点を T とすると,



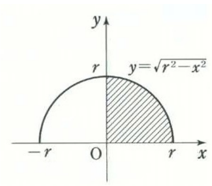
$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x \qquad (1)$$

すなわち　　$\sin x<x<\tan x$

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x \qquad (2)$$

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のときも同様.
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x=1$ より, はさみうちの原理を用いると,
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　[1]

2.2　扇形の面積　$S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$



証明

$\displaystyle\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx$

$x=r\sin\theta$ とおいて置換積分すると,

$$\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\theta)r\cos\theta d\theta=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$

$$=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{r^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad (3)$$

$$=\frac{1}{4}\pi r^2$$

$\pi r^2\cdot\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{1}{2}r^2\theta$　[1]

2.3　不定積分 $\int\cos x dx$

証明

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\sin x+\frac{\sin h}{h}\cos x\right)$$

ここで, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{cosh-1}{h}=0$ と $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ により　(4)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=0\cdot\sin x+1\cdot\cos x=\cos x$$

よって $(\sin x)'=\cos x$ となる.
このことから $\displaystyle\int\cos x dx=\sin x+C$　(C は積分定数)
[1]

3　回転体の体積を求める積分

次に、y 軸周りの回転体の 2 つの求め方を扱う.

3.1　回転体の体積

区間 $[c,d]$ を n 等分して, その分点の座標を c に近い方から順に,
$y_1,y_2,y_3,\cdots,y_{n-1}$
とし,
$c=y_0, d=y_n, \dfrac{d-c}{n}=\Delta y$
とおく.
そして各分点を通り,y 軸に垂直な平面でこの立体を分割すると
$\displaystyle V_n=\sum_{k=1}^{n}S(y_k)\cdot\Delta y$
とすると,$n\to\infty$ のとき,$V_n\to V$
$\displaystyle V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S(y_k)\cdot\Delta y=\int_c^d S(y)dy$　区分求積法
ここで, 点 $(0,y)$ を通り,y 軸に垂直な平面でこの回転体を切ると, 断面は半径が $|g(y)|$ の円であるので
$S(y)=\pi\{g(y)\}^2$
であるから,
$\displaystyle V=\int_c^d S(y)dy=\pi\int_c^d x^2dy$　ただし $c<d$

3.2　バウムクーヘン積分

$0\leqq a<b$ とし,$a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq 0$ とする. このとき,$y=f(x)$ のグラフと直線 $x=a$,$x=b$,x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積は
$\displaystyle\int_a^b 2\pi x f(x)dx$　[3]

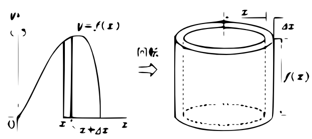
区間 $[a,x]$ で $y=f(x)$,x 軸で囲まれた部分を y 軸周りに一回転してできた立体の体積を
$V(x)$ とすると,$V(x+h)-V(x)(h\neq 0)$ は下図の色付き部分の回転体である.
この回転体の底面積は $\{(x+h)^2-x^2\}\pi$. 区間
$[x,x+h]$ の $f(x)$ の最小値 m, 最大値 M とすると
$\{(x+h)^2-x^2\}\pi\times m \leqq V(x+h)-V(x) \leqq$
$\{(x+h)^2-x^2\}\pi\times M$

$$\Longleftrightarrow \quad (2x+h)\pi m \leqq \frac{V(x+h)-V(x)}{h} \leqq (2x+h)\pi M$$

$\lim_{h\to 0} m = \lim_{h\to 0} M = f(x)$ であるので
はさみうちの定理より

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h)-V(x)}{h} = V'(x) = 2x\pi f(x)$$

よって $V=V(b)=\displaystyle\int_a^b 2x\pi f(x)dx$



4 考察

2.1 の (1),2.2 の (3),2.3 の (4) は証明すべき結論を前提に証明しており循環論法となっている.
循環を回避する証明方法については次に検討する.

また、回転体の体積については、教科書の公式が立体を円盤状に分割し区分求積法を用いているのに対し、バウムクーヘン積分では立体を円筒状に分割したものの和で考えられている. 3.2 の証明が一般的であるが, 体積が円筒状に分割されたものの和であることは自明ではないとされることもある. バウムクーヘン積分を用いることのメリットが多いにも関わらず教科書で扱われていないのはやはり証明が厳密ではないためではないか.

5 循環論法の改善案

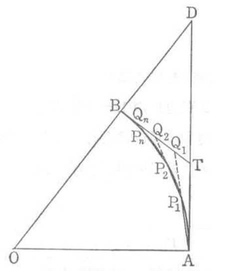
ここでは改善案として扇形の弧の長さを用いて 2.1 の証明をする.

また, 弧度法の定義より中心角 θ を半径 r, 弧の長さ l を用いて $\theta=\dfrac{l}{r}$ と表す.

証明

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき,
半径 1, 中心角 x ラジアンの
扇形 OAB の B から半径 OA に
おろした垂線と半径 OA の交点
を C, 点 A における円の接線と
直線 OB の交点を D とすると,
弧 AB$=x$,BC$=\sin x$,
AD$=\tan x$ である.
BC<AB< 弧 AB より,

$$\sin x < x \tag{5}$$



点 B における円の接線と直線 AD の
交点を T とすると BT $<$ DT,
よって AT $+$ BT $<$ AD.
弧 AB に内接する折れ線
$\mathrm{AP_1P_2\cdots P_nB}$
は△ ABT 内の凸な折れ線であり,

$$\text{弧 AB} - \mathrm{AP_1P_2\cdots P_nB} < \mathrm{DT} - \mathrm{BT} \tag{6}$$

さらに, 弦 $\mathrm{AP_1},\cdots$ を延長して, 線分 BT
と交わる点を $\mathrm{Q_1},\cdots$ とすると,
△ $\mathrm{ATQ_1},\cdots$ について, 三角形の成立条件より
$\mathrm{AP_1}+\mathrm{P_1Q_1} < \mathrm{AT}+\mathrm{TQ_1}, \quad \cdots, \mathrm{P_nB} < \mathrm{P_nQ_n}+\mathrm{Q_nB}$
つまり,$\mathrm{AP_1P_2\cdots P_nB} < \mathrm{AT}+\mathrm{BT}$
ここで,(6) より,弧 AB $-$ (DT $-$ BT) $< \mathrm{AP_1P_2\cdots P_nB}$
であるので,
弧 AB $<$ AT $+$ DT $=$ AD である.
よって $x<\tan x$
(5) より, $\sin x < x < \tan x$ [2]
以降は 2.1 と同様の証明である.

6 おわりに

学習指導要領では「極限, 微分法及び積分法についての概念や原理・法則を体系的に理解する」[4] ことを目標としている. そのため極限については厳密に定義されていない. 微分では変化率を理解させたり、積分では計算の手段ばかりでなく面積という捉え方を理解させることも大切であると考える. バウムクーヘン積分における円筒状に分割したものの和というのも自明ではないとしても図形的には納得のいく説明である. 高校数学の段階では厳密さよりも本質をわかりやすく, 受け入れやすいよう直観的に理解させ, 大学数学にスムーズに移行できる土台作りを優先すべきであり, 過度な厳密さは多少目をつむっても良いと考える.

参考文献

[1] 岡部 恒治 ほか 17 名：『高等学校 数学 III』. 数研出版，東京，2018.

[2] 一松 信：『解析学序説（新版） 上巻』. 裳華房，東京，1981.

[3] 黒木美左雄:『大学への数学 1 対 1 対応の演習/数学 III(微積分編)[改訂版]』. 東京出版，東京，2014.

[4] 文部科学省：『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』. http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2018/07/17/1407073_05.pdf