需要変動型交通モデルにおけるロバスト Wardrop 均衡問題

2015SS047 中西麻友

指導教員：福嶋雅夫

1　はじめに

道路網における交通の流れを数理モデルを用いて解析する手段の 1 つに, 交通量配分問題がある．本研究では, 各利用者がリンクコストに関する不確実な情報のもとで起こり得る最悪のケースを想定して自分の経路を選択するものと考えたときに得られる均衡状態をロバスト Wardrop 均衡と定義する. そして, 具体的な交通ネットワークに対し, 需要変動型交通モデルにおけるロバスト Wardrop 均衡解を求め, 数値実験による利用者の経路選択行動観察を行う. 関連する研究として，高橋 [3]，渡邉 [4] がある．特に，高橋 [3] は需要固定型モデルにおいてパスコストに対する不確実性を考慮した場合を取り扱っている．

2　Wardrop 均衡の定式化

OD ペア k の集合を K，OD ペア k に属するパス集合を P^k，すべてのパス集合を P，パス p 上のフロー量を表すパスフロー変数 x_p を成分とするベクトルを x，(k,p) 成分が，OD ペア k にパス p が属するとき 1，属さないとき 0 で与えられる 0-1 行列を $N \in \mathbb{R}^{|K|\times|P|}$ とする．

需要変動型交通モデルでは，OD ペア間の交通需要がその OD ペア間の最小コストに依存することから，交通需要に関する式は OD ペア間の最小コストを表す変数 λ_k を成分とするベクトル λ の減少関数として以下のように表されると仮定する．

$$d_k(\lambda_k) = \alpha_k - \beta_k\lambda_k \qquad k \in K \tag{1}$$

ただし，$\alpha \in \mathbb{R}^{|K|}$ は α_k を成分とするベクトル，$B \in \mathbb{R}^{|K|\times|K|}$ は β_k を対角成分とする対角行列である．また (1) 式は各 OD ペアに属するパスのフロー量の総和が，その OD ペアに対する交通需要に等しいことを表している．

交通量配分問題における基本的な概念に，Wardrop 提唱の「利用される経路の旅行時間はみな等しく，利用されない経路の旅行時間よりも小さいか，せいぜい等しい」という原則があり，この均衡状態を Wardrop 均衡と呼ぶ. これを混合相補性問題として次のように表す．ただし $f(x)$ は，パスフローベクトルが x のときのパス p のコスト $f_p(x)(p \in P)$ を成分とするベクトル関数である．

$$\begin{cases} x^T(f(x) - N^T\lambda) = 0 \\ x \geq 0 \ ,\ f(x) - N^T\lambda \geq 0 \\ Nx + B\lambda = \alpha \end{cases} \tag{2}$$

Fischer-Burmeister 関数 $\phi(a,b) = a + b - \sqrt{a^2+b^2}$ を用いて混合相補性問題 (2) は次の連立方程式に再定式化できる．

$$\begin{cases} \phi(x_p, f_p(x) - \lambda_k) = 0 \quad p \in P^k \ ,\ k \in K \\ Nx + B\lambda = \alpha \end{cases} \tag{3}$$

さらに連立方程式 (3) から次の最適化問題を定義する．

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k} \phi^2(x_p, f_p(x) - \lambda_k) \\ \text{s.t.} \quad & Nx + B\lambda = \alpha \end{aligned} \tag{4}$$

問題 (4) の目的関数は常に非負である．さらに，最適解において目的関数の値が 0 であるならば，それは連立方程式 (3) の解，つまり，混合相補性問題 (2) の解である．

3　ロバスト Wardrop 均衡の定式化

本研究では各利用者が，以下の式で表す最悪パスコスト関数が最小となるパスを選択するとしたときに最終的に落ち着く均衡状態をロバスト Wardrop 均衡と定義し，各リンクのコストに不確実性が存在する場合を考える．ここで u を不確実性を表すパラメータ，U を空でない有界集合 (不確実性集合)，$f_p^u(x)$ を不確実なパラメータ u を含むパス p のコスト関数とおいた.

$$\tilde{f}_p(x) = \max\{f_p^u(x) \mid u \in U\} \qquad p \in P^k \tag{5}$$

リンク a のコスト関数は，不確実性を含むパラメータ c_a，リンク a がパス p に含まれるとき 1，含まれないとき 0 となる定数 δ_{ap}，定数 r_a を用いて次式で表されると仮定する．

$$h_a^c(y_a) = \sum_{p\in P} c_a\delta_{ap}x_p + r_a \qquad a \in L \tag{6}$$

パラメータ c_a を成分とするベクトル $c \in \mathbb{R}^{|L|}$ は，無限大ノルムで表される以下の不確実性集合 U に含まれるものとする．ただし，$c^0 \in \mathbb{R}^{|L|}$ は定数ベクトル，G は非負の定数行列，$\rho \geq 0$ は不確実性の大きさを表す定数とする．

$$U = \{c \mid c = c^0 + Gv\ ,\ \|v\|_\infty \leq \rho\} \tag{7}$$

よって，パス p の最悪パスコスト関数 $\tilde{f}_p$ は，$\mathbf{1}$ をすべての成分が 1 であるベクトル，$\Gamma^p \in \mathbb{R}^{|L|\times|P|}$ を (a,q) 成分が $\delta_{ap}\delta_{aq}$ である 0-1 行列，として次式で表される．

$$\tilde{f}_p(x) = (c^0 +\ \rho\, G\mathbf{1})^T\Gamma^p x + b^p \tag{8}$$

さらに，前節と同様の議論を用いると，ロバスト Wardrop 均衡問題は，以下の最適化問題として定式化できる．

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k} \phi^2(x_p, (c^0 +\ \rho\, G\mathbf{1})^T\Gamma^p x + b^p - \lambda_k) \\ \text{s.t.} \quad & Nx + B\lambda = \alpha \end{aligned} \tag{9}$$

次に，パラメータ c_a を成分とするベクトル $c \in \mathbb{R}^{|L|}$ が 2 ノルムで表される不確実性集合 $U = \{c \mid c = c^0 +$

Gv , $\|v\|_2 \le \rho\}$ に含まれる場合を考える．無限大ノルムで表される場合と同様に，パス p の最悪パスコスト関数 $\tilde{f}_p$ は次のように書き換えることができる．

$$\tilde{f}_p(x) = (c^0)^T \Gamma^p x + \rho \|G^T \Gamma^p x\|_2 + b_p \qquad (10)$$

ここで,$\xi(x) \in \mathbb{R}^{|P|}$ を $\xi_p(x) = (c^0)^T \Gamma^p x (p \in P)$ を成分とするベクトル，$\eta(x) \in \mathbb{R}^{|P|}$ を $\eta_p(x) = \|G^T \Gamma^p x\|_2 (p \in P)$ を成分とするベクトルとすると，ロバスト Wardrop 均衡問題は次のように表される．

$$0 \le x \perp \xi(x) + \rho\eta(x) + b - N^T\lambda \ge 0 \ , \ \ Nx + B\lambda = \alpha \qquad (11)$$

二次錐相補性条件に関する命題 [3] を用いると (11) は以下の二次錐相補性問題として書き換えることができる．

$$\begin{aligned} & 0 \le x \perp \xi(x) + \rho s + b - N^T\lambda \ge 0 \,, \\ & \mathcal{K}^{|L|+1} \ni F_p v + g_p \perp H_p \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^{|L|+1} \quad p \in P \,, \qquad (12) \\ & Nx + B\lambda = \alpha \end{aligned}$$

ここで，$\mathcal{K}^{|L|+1}$ は $|L| + 1$ 次元の二次錐,

$$F_p = \begin{pmatrix} 0_{1\times(p-1)|L|} & 0_{1\times|L|} & 0_{1\times(|P|-p)|L|} \\ 0_{|L|\times(p-1)|L|} & I_{|L|} & 0_{|L|\times(|P|-p)|L|} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(|L|+1)\times m}$$

$$g_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|L|+1}$$

$$H_p = \begin{pmatrix} e_p^T & 0 \\ 0 & G^T\Gamma^p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(|L|+1)\times 2|P|}$$

であり，$s \in \mathbb{R}^{|P|}$ は補助変数 s_p を成分とするベクトル，$e_p \in \mathbb{R}^{|P|}$ は第 p 成分が 1 でその他の成分がすべて 0 となるベクトル，$I_{|L|} \in \mathbb{R}^{|L|\times|L|}$ は $|L|$ 次単位行列である．二次錐相補性問題を最適化問題へ変換するために，以下で表される二次錐の FB 関数 [2] を導入する．

$$\phi_{soc}(u, v) = u + v - (u \cdot u + v \cdot v)^{1/2} \qquad (13)$$

ここで $\cdot$ はジョルダン積を表す．関数 ϕ_{soc} を用いて二次錐相補性問題 (12) は次の最適化問題に定式化される．

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k\in K} \sum_{p\in P^k} (\phi^2(x_p, (c^0)^T\Gamma^p x + \rho s_p + b_p - \lambda_k) \\ & \quad + \phi_{soc}^2(F_p v + g_p, H_p(\tbinom{s}{x}))) \\ \text{s.t.} \quad & Nx + B\lambda = \alpha \qquad (14) \end{aligned}$$

4 数値実験

数値実験は図 1 の道路網を用いて行う．節点 1→6, 2→6 をそれぞれ OD ペア 1，OD ペア 2 とする．パスは，OD ペア 1 に $(e_1 \to e_5 \to e_8)$，$(e_1 \to e_6)$，$(e_1 \to e_3 \to e_7)$，OD ペア 2 に $(e_2 \to e_7)$，$(e_2 \to e_4 \to e_6)$，$(e_2 \to e_4 \to e_5 \to e_8)$ の各 3 つあり，順にパス 1〜6 とする．また，$\alpha = (130, 130)$，$B = diag(1, 1)$，G を単位行列，$r = (10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10)^T$，$c^0 = (0.03, 0.15, 0.04, 0.06, 0.10, 0.12, 0.22, 0.03)$ とする．

MATLAB の最適化ソルバーである fmincon を使用し，リンクコスト関数における不確実性が無限大ノルム，2 ノルムで表される場合にそれぞれ ρ の値を変化させていき，パスフロー変数 x_p, OD ペア k の最小コスト λ_k を求めた．

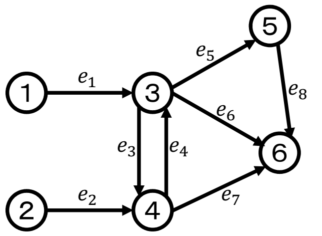

図 1 本実験で用いる道路網

表 1 ロバスト Wardrop 均衡

無限大ノルム	x_p, λ_k	$\rho = 0$	$\rho = 0.1$	$\rho = 1$	$\rho = 10$	$\rho = 20$
OD ペア 1	パス 1	6.22	15.42	10.21	1.68	0.87
	パス 2	90.08	68.58	28.34	4.33	2.23
	パス 3	0	0	0	0	0
	最小コスト	33.70	46.01	91.45	124.00	126.90
OD ペア 2	パス 4	80.29	70.06	32.64	5.15	2.66
	パス 5	0	0	0	0	0
	パス 6	0	0	0	0	0
	最小コスト	49.71	59.94	97.36	124.85	127.34
2 ノルム	x_p, λ_k	$\rho = 0$	$\rho = 0.1$	$\rho = 1$	$\rho = 10$	$\rho = 20$
OD ペア 1	パス 1	6.22	12.16	12.84	2.51	1.32
	パス 2	90.08	74.79	33.92	5.76	3.00
	パス 3	0	0	0	0	0
	最小コスト	33.70	43.05	83.24	121.73	125.68
OD ペア 2	パス 4	80.29	72.78	39.51	6.99	3.65
	パス 5	0	0	0	0	0
	パス 6	0	0	0	0	0
	最小コスト	49.71	57.22	90.49	122.82	126.24

5 まとめ

数値実験の結果，不確実性集合を無限大ノルムで表した場合の方が，2 ノルムで表した場合よりも ρ の値の大きさによる影響が大きいということが確認できた．これは，不確実性集合の大きさが，後者の場合より前者の場合の方が大きいためである．また，ρ の値が大きくなると需要量が小さくなることも確認できた．これは，不確実な要素を多く含む道路を避ける利用者が多いためであると考える．

本研究では，計算の煩わしさを避けるため，リンクコスト関数が線形で表されると仮定したが，より現実に近い交通量と所要時間の関係を表すため，所要時間関数を非線形として定式化を行うことが今後の課題である．

参考文献

[1] 土木学会: 交通ネットワークの均衡分析 -最新の理論と解法-, 1998.

[2] M. Fukushima, Z. Luo, and P. Tseng: *Smoothing Functions for Second-Order-Cone Complementarity Problems*, SIAM J. Optim., vol.12 (2001), pp.436–460

[3] 高橋仁: 不確実性を含む交通モデルに対するロバスト Wardrop 均衡，京都大学工学部卒業論文，2010

[4] 渡邉良平: 高速道路料金を考慮した交通量配分問題，南山大学理工学部卒業論文，2017