複数の箱を用いたストリップパッキング問題

2015SS008 深津仁

指導教員：福嶋雅夫

1　はじめに

ストリップパッキング問題は長方形詰め込み問題に分類され，箱内の一番高い位置に収まっている素材の高さが最小になるように，かつ高さと幅の異なる複数の素材を箱内に重ならないように配置する問題である [1]．VLSI 設計でモジュール配置を決定する問題や，鉄鋼 · 繊維産業で，大きな鉄板や布から目的の大きさの素材に切り分ける問題，といった実用的な問題で活用することができる [2]．また，二次元ナップサック問題，二次元ビンパッキング問題，ストリップパッキング問題，面積最小化問題，二次元カッティング問題，正方形詰め込み問題，パレットローディング問題，といった非常に多くのバリエーションの問題が存在する．

一般的にストリップパッキング問題では箱が一つであることを想定している．しかしストリップパッキング問題を複数の箱の場合で考えたいときもあるだろう．本研究では，二つの箱を用いて品物を詰めていったとき，高い方の箱の高さを最小にする問題を考える．

関連する研究として，後藤 [3] は複数の箱を用いたストリップパッキング問題に対して近似解を求める方法を考えている．これに対して本研究では整数計画問題として定式化することにより厳密解を求めることを考える．

2　箱が二つの場合の定式化

素材集合を $I = \{1, 2, \cdots, n\}$，素材 $i \in I$ の幅と高さをそれぞれ w_i，h_i とする．箱が二つの場合には，二つの箱のうち高い方の箱の高さをなるべく低くすることを考える．二つの箱をそれぞれ箱 1，箱 2 とし，素材 i を箱 1 または箱 2 に配置したときの配置をそれぞれ (x_i^1,y_i^1),(x_i^2,y_i^2) と表す．また，箱 1 の幅を W_1，箱 2 の幅を W_2 とし，素材 i を箱 1 に入れるとき $z_i = 1$，素材 i を箱 2 に入れるとき $z_i = 0$ となるバイナリ変数 z_i を用意する．すべての素材を詰めたときの箱の高さは，箱 1 で $max_{1\le i\le n}\{y_i^1 + h_i z_i\}$，箱 2 で $max_{1\le i\le n}\{y_i^2 + h_i(1 - z_i)\}$ と表すことができるので，高いほうの箱の高さは $max\{max_{1\le i\le n}\{y_i^1 + h_i z_i\}, max_{1\le i\le n}\{y_i^2 + h_i(1 - z_i)\}\}$ と表すことができる．この最小化は以下のように書き換えられる．

$$
\begin{array}{ll}
\min & h \\
\text{s.t.} & y_i^1 \le h - h_i z_i,\ y_i^2 \le h - h_i(1 - z_i) \\
 & y_i^1 \le M z_i,\ y_i^2 \le M(1 - z_i)(i = 1, 2, \cdots, n)
\end{array}
$$

次式は素材 i を箱 1 に入れてその左端を x_i^1 におくことを表す．

$$x_i^1 \le W_1 - w_i \qquad (1) \qquad\qquad x_i^2 = 0 \qquad (2)$$

同様に，次式は素材 i を箱 2 に入れてその左端を x_i^2 におくことを表す．

$$x_i^1 = 0 \qquad (3) \qquad\qquad x_i^2 \le W_2 - w_i \qquad (4)$$

これらは式 (1),(2) または式 (3),(4) のどちらかが成り立つという or の関係になっているので，十分大きい定数 M を用いて and の表現に書き換える．

$$x_i^1 \le M z_i,\ x_i^2 \le M(1 - z_i)$$

上の式により，箱 1 に配置したときは箱 2 において $x_i^2 = 0$ となり，箱 2 に配置したときは箱 1 において $x_i^1 = 0$ となる．よって，次式は各素材がどちらかの箱の中に収まることを表す．

$$
\begin{array}{l}
x_i^1 \le W_1 - w_i,\ x_i^2 \le W_2 - w_i \\
x_i^1 \le M z_i,\ x_i^2 \le M(1 - z_i)
\end{array}
$$

次に素材同士が重ならないための条件を考える．まず箱 1 に対して次式が得られる．

$$
\begin{array}{l}
x_i^1 + w_i z_i - x_j^1 \le 0 \quad \text{OR} \\
x_j^1 + w_j z_j - x_i^1 \le 0 \quad \text{OR} \\
y_i^1 + h_i z_i - y_j^1 \le 0 \quad \text{OR} \\
y_j^1 + h_j z_j - y_i^1 \le 0
\end{array}
$$

これを and の表現にするため，バイナリ変数 $u_{ij1}^1 \cdots u_{ij4}^1$ を用いると次式を得る．

$$x_i^1 + w_i z_i - x_j^1 \le M u_{ij1}^1 \qquad (5)$$
$$x_j^1 + w_j z_j - x_i^1 \le M u_{ij2}^1 \qquad (6)$$
$$y_i^1 + h_i z_i - y_j^1 \le M u_{ij3}^1 \qquad (7)$$
$$y_j^1 + h_j z_j - y_i^1 \le M u_{ij4}^1 \qquad (8)$$
$$u_{ij1}^1 + u_{ij2}^1 + u_{ij3}^1 + u_{ij4}^1 = 3 \qquad (9)$$

M は十分大きい正の定数，$u_{ijt}^1 (t = 1, 2, 3, 4)$ は補助変数である．式 (9) によって式 (5) から (8) のうち 3 つの式で u_{ijt}^1 が 1 となり，右辺は M となる．M は十分大きい数なので，その式は必ず成り立つと考えられる．

箱 2 についても同様に，バイナリ変数 $u_{ij1}^2 \cdots u_{ij4}^2$ を用いて次式を得る．

$$
\begin{array}{l}
x_i^2 + w_i(1 - z_i) - x_j^2 \le M u_{ij1}^2 \\
x_j^2 + w_j(1 - z_j) - x_i^2 \le M u_{ij2}^2 \\
y_i^2 + h_i(1 - z_i) - y_j^2 \le M u_{ij3}^2 \\
y_j^2 + h_j(1 - z_j) - y_i^2 \le M u_{ij4}^2 \\
u_{ij1}^2 + u_{ij2}^2 + u_{ij3}^2 + u_{ij4}^2 = 3
\end{array}
$$

ここで $z_i^1 = z_i$, $z_i^2 = 1 - z_i$ とおき，$H_1 \geq H_2$ の条件と重み $\alpha \in (0,1)$ を用いて，以上をまとめると以下の定式化が得られる．

$$
\begin{aligned}
\min \quad & H_1 + \alpha H_2 \\
\text{s.t.} \quad & H_1 \geq H_2 \\
& x_i^k \leq W_k - w_i,\ x_i^k \leq M z_i^k \\
& y_i^k \leq H_k - h_i z_i^k,\ y_i^k \leq M z_i^k \\
& x_i^k + w_i z_i^k - x_j^k \leq M u_{ij1}^k \\
& x_j^k + w_j z_j^k - x_i^k \leq M u_{ij2}^k \\
& y_i^k + h_i z_i^k - y_j^k \leq M u_{ij3}^k \\
& y_j^k + h_j z_j^k - y_i^k \leq M u_{ij4}^k \\
& u_{ij1}^k + u_{ij2}^k + u_{ij3}^k + u_{ij4}^k = 3 \\
& z_i^1 + z_i^2 = 1 \\
& u_{ij1}^k, \cdots, u_{ij4}^k \in \{0,1\} (1 \leq i < j \leq n) \\
& z_i^k \in \{0,1\} (i = 1, 2, \cdots, n)(k = 1, 2)
\end{aligned}
$$

3 箱が 1 つの場合の定式化

同様に箱が 1 つの場合の定式化は以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
\min \quad & h \\
\text{s.t.} \quad & x_i \leq W - w_i,\ y_i \leq h - h_i \\
& x_i + w_i - x_j \leq M z_{ij1} \\
& x_j + w_j - x_i \leq M z_{ij2} \\
& y_i + h_i - y_j \leq M z_{ij3} \\
& y_j + h_j - y_i \leq M z_{ij4} \\
& z_{ij1} + z_{ij2} + z_{ij3} + z_{ij4} = 3 \\
& z_{ijt} \in \{0,1\} \\
& (1 \leq i < j \leq n, t = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}
$$

4 実験と考察

計算実験では Gurobi を用いる．素材を 13 個用意し，使用する素材の高さと幅は 13 個それぞれで乱数を用いて決定する．箱の幅は $W = W_1 = W_2 = 15$，重み $\alpha = 0.9$ とし，箱 1 つに配置した場合と，箱 2 つに配置した場合で同じ素材集合を用いて，それぞれ 20 回ずつ計算を行う．この工程を，乱数の幅を 5 ～ 10 と 1 ～ 10 にわけて 2 回行う．ここで箱 1 つの問題の最適解における h を h^* とし，箱 2 つの問題の最適解における H_1, H_2 を H_1^*, H_2^* とすると，箱 1 つの問題で使用した箱の面積は $S_1 = Wh^*$，箱 2 つの問題で使用した箱の面積は $S_2 = W_1 H_1^* + W_2 H_2^*$ と表すことができる．また，素材の面積の合計を $S = \sum_{i=1}^{13} h_i w_i$ とし，$V_1 = S_1/S$，$V_2 = S_2/S$ を用いて結果の比較を行う．V_1，V_2 は小数第 3 位までを利用するものとする．

乱数の幅を 5 ～ 10 として計算を行った結果，図 1 で V_1 と V_2 のグラフが完全に一致しているように，20 回中全てで $V_1 = V_2$ となった．また，乱数の幅を 1 ～ 10 として計算を行った結果，20 回中 19 回で $V_1 = V_2$ となった．図 2 では 7 回目の計算結果だけ V_1 と V_2 の結果が異なっており，そのときの値は $V_1 = 1.033$，$V_2 = 1.071$ であった．V

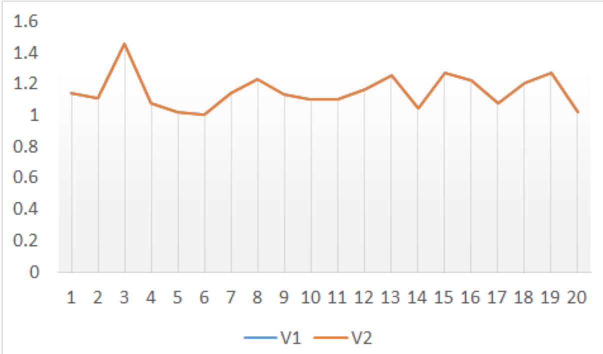

図 1: 乱数の幅が 5 ～ 10 で箱 1 つと箱 2 つの配置結果

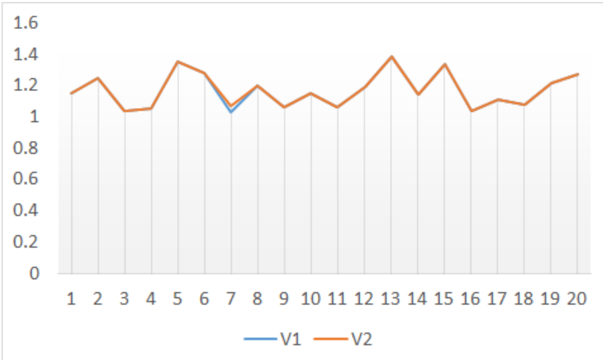

図 2: 乱数の幅が 1 ～ 10 で箱 1 つと箱 2 つの配置結果

の値は 1 に近いほど素材を配置したときに生じる無駄なスペースが少ないということなので，乱数の幅が 5 ～ 10 のときは使用する箱の数で差は生まれず，乱数の幅が 1 ～ 10 のときは箱 1 つに配置すると無駄なスペースが生まれにくいということがわかった．

5 おわりに

ストリップパッキング問題を用いて箱が複数の場合の定式化を行い，問題を混合整数計画問題として扱うことにより Gurobi を用いて問題を厳密に解いた．今回の実験では，僅かな差ではあるが箱 2 つよりも箱 1 つのほうが無駄なスペースが少なくなるという結果を得た．しかし異なる幅の箱を複数用いることで無駄なスペースを減らすことができる可能性もある．パソコンの処理速度の問題で，素材の数は 13 個が限界であったが，素材の数や箱の数を増やしたとき，あるいは異なる幅の箱を用いたときどのような結果になるかを調べることが今後の課題である．

参考文献

[1] 梅谷俊治・今堀慎治：『切出し・詰め込み問題とその応用-(2) 長方形詰め込み問題-』オペレーションズ・リサーチ，Vol.50，2005，pp．335-340

[2] 藤澤克樹・梅谷俊治：『応用に役立つ 50 の最適化問題』．朝倉書店，2017

[3] 後藤英人：『複数の箱を用いたストリップパッキング問題に対する解法』．南山大学理工学部卒業論文，2015