二輪型倒立振子における制御則のシミュレーションによる比較

2015SC102　山田博貴　2015SC106 山岡菜摘

指導教員：陳幹

1　はじめに

本研究で用いる倒立振子は, 並行車輪駆動型倒立振子である. 制御対象である倒立振子は不安定系である. 常に適切な入力を与えなければ倒立状態を維持することができない. このような不安定な制御対象に対して実機で直接制御則を試すことは, 制御対象に対しても, 安全上に関しても好ましくない. 故にシミュレーションが重要となる.

倒立振子は制御工学の中でも最もポピュラーなものの一つである. 倒立振子を応用した例としてセグウェイなどが挙げられ, 近年より身近なものとなっている. 倒立振子システムは単純な構造を持つシステムではあるが、制御が困難であるシステムの一つであり, 現代制御の制御器設計, 及び, その有用性の実証などを学ぶには非常に最適な制御対象である.

本研究では, 制御対象に対して現代制御の代表的な手法として LQR 最適制御を用いて倒立状態を制御する. また, 比較対象としてスライディングモードによる制御を扱う. それらの制御則の有用性をシミュレーションを用いて確かめる．また, 制御器の精度を高める手法としてカルマンフィルタを構築し性能を検証する. 本研究では, シミュレーションによる制御則の性能評価に重点をおく.

2　倒立振子のモデリング

図 1 は, 横から見た倒立振子の概略図である． LEGO MINDSTORMS EV3 を使用し,EV3 の形状は図 2 の“ GyroBoy ” を適用す. 図 2 の画像は文献 [1] を参照した.

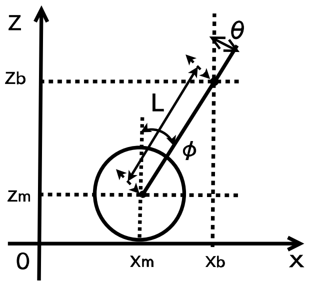

図 1　概略図

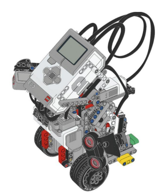

図 2　EV3

概略図より, 車体の回転角度 θ, 車輪の回転角度 ϕ, $(x_m, z_m) = (R_w\phi, R_w)$ は車輪の重心 $(x_b, z_b) = (x_m + Lsin(\theta), z_m + Lcos(\theta))$ は, 車体の重心の位置とする.

物理パラメータを以下の表 1 に示す.

いくつかのパラメータは, 測定が難しいので参考文献 [2] の値を利用した. この制御対象に対して, 以下の手順で運動方程式を得る.

T_1 は並進運動のエネルギー,T_2 は回転運動エネルギー,U は重力のポテンシャルエネルギーである.LagrangianL_g として, 次式を考える.

表 1　物理パラメータ

重力加速度	$g = 9.81$	$[m/s^2]$
車輪の重量	$m = 0.0288$	$[kg]$
車輪の半径	$R_w = 0.027$	$[m]$
車輪の回転モーメント	$J_w = mR_w^2/2$	$[kgm^2]$
車体の重量	$M = 0.7207$	$[kg]$
車体の重心から車輪の重心までの距離	$L = 0.11$	$[m]$
車体の慣性モーメント	$J_\theta = ML^2/3$	$[m]$
DC モータの慣性モーメント	$J_m = 1 \times 10^{-5}$	$[kgm^2]$
モータの抵抗値	$R_m = 6.69$	$[\Omega]$
DC モータ逆起電力定数	$K_b = 0.468$	$[V_s/rad]$
DC モータトルク定数	$K_t = 0.317$	$[N_m/A]$
車体とモータの摩擦係数	$f_m = 0.0022$	
車輪と床の摩擦係数	$f_w = 0$	

$$L_g = T_1 + T_2 - U \tag{1}$$
$$T_1 = \frac{1}{2}M(\dot{x_b^2} + \dot{z_b^2}) + \frac{1}{2}m(\dot{x_b^2} + \dot{z_b^2}) \tag{2}$$
$$T_2 = \frac{1}{2}J_w\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}J_\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_m(\dot{\phi} - \dot{\theta}) \tag{3}$$
$$U = mgz_m + Mgz_b \tag{4}$$

L_g を基に, 状態空間表現に起こす.

状態変数 $x(t) = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \dot{\phi} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 入力 $u(t) = v$ とし、$sin\theta \fallingdotseq \theta, cos\theta \fallingdotseq 1, \dot{\theta}^2 \fallingdotseq 0$ としてマクローリン展開の一次の項で近似し線形化すると, 状態空間表現は以下のようになる

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{5}$$

となる. この状態方程式を導出するにあたって文献 [3] を参考にした.

3　最適レギュレータ

最適レギュレータは, 与えられた重み行列 $Q{\geq}0, R{\geq}0$ に対して, 評価関数

$$J = \int_0^\infty (x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t))dx \tag{6}$$

を最小にするフィードバックゲイン K を求めるものである. フィードバックゲイン K は

$$K := -R^{-1}B^TP \tag{7}$$

により与えられる. ただし,P は, リカッチ方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{8}$$

を満足する実数の正定対称解 $P = P^T > 0$ である. 実験機の定格電圧 7.4[v] の制約があるため,R の値を大きくすることにより入力電圧を抑えた.7.4[v] 以下の入力電圧で, 実機を安定化させるため, 重み行列を調整した. 導出した重み行列 Q と R, それによって得られたゲイン K を, 以下に示す.

$R = 1$

$Q = diag([3.4 \quad 10 \quad 0.02 \quad 2])$

$K = [-1.8439 \ -71.4545 \ -1.5889 \ -8.7619]$ フィードバックゲイン K は, 文献 [4] を基に設計した.

4 スライディングモード制御 (SMC)

4.1 スライディングモード制御の概要

スライディングモード制御理論は, 可変構造制御系理論の一つであり, 優れたロバスト制御系が構成できる. 設計にあたり文献 ([5],[6]) を基に行った. スライディングモード制御でのシステムは以下の式 (9) ように表され,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \sigma = Sx \end{cases} \tag{9}$$

制御入力は次のように切り換えるものとする.

$$u = \begin{cases} u^+ & \sigma > 0 \text{ のとき} \\ u^- & \sigma < 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{10}$$

式 (9) の σ で定義される式を切換関数と呼ぶ. スライディングモード制御では, 切換関数の符号により, 入力を切り替える. スライディングモードで制御されたシステムの挙動の一例を位相平面上に示すと, 図 3 のようになる.

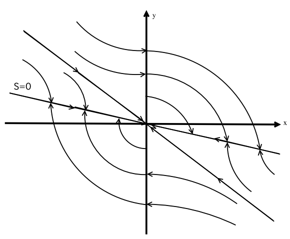

図 3 システム式

$\sigma = 0$ の時にシステムの挙動が切り替わるため, 切替関数が 0 の時の式 ($S = 0$) を切換線または切換面と呼ぶ. 位相平面上でのシステムの挙動が切換線上に到達すると, 状態は切換線に拘束され, 平衡点へと滑っていくことになる. 式 (9) に対し, スライディングモード制御系の設計を行う.

4.2 切換平面の設計

本研究では, 切換平面の設計において, 等価制御法に基づき, システムの零点を利用する設計法を行った. システムは非線形性の最も強いスイッチング入力がかかるため, 連続入力で置き換えることにより, 解析及び設計の見通しが良くなる. 入力の切換が時間遅れなく理想的に行われ, かつ, 制御対象が切換平面に拘束され,$\sigma = 0$ となった場合の制御においては, 等価的に次の線形状態フィードバック制御入力が発生していると見なす. 等価制御系は式 (11) で表される.

$$u_{eq} = -(SB)^{(-1)} SAx \tag{11}$$

式 (11) を式 (9) に代入する.

$$\dot{x} = \{A - B(SB)^{(-1)} SA\} x \tag{12}$$

切換関数を決定するときには,(S, A, B) の零点を複素平面上左半面に設定する必要があり、以下に示す最適制御のフィードバックゲイン F として選ぶ.

$$F = S = B^T P \tag{13}$$

ただし,P は任意の $Q > 0$ に対して, 次のリッカチ方程式の解である.

$$PA + A^T P - PBB^T P + Q = 0 \tag{14}$$

4.3 スライディングモードコントローラの設計

制御則の設計の目的は, 切換面にない状態を切換面に収束させ, その面上に保つことである. 本研究では自由階層制御法を用いて設計を行った. 式 (9) と同じシステムを考える. 超平面 σ でのスライディングモードの存在条件は次のように与えられる. 本研究で, 切換超平面は一つしかないので, その条件で話を進めていく.

$$\begin{cases} \dot{\sigma} > 0 & \sigma < 0 \text{ のとき} \\ \dot{\sigma} < 0 & \sigma > 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{15}$$

この条件を満足するように, 自由階層制御法でつぎの制御則を考える.

$$\dot{\sigma} = -Q_1 sgn(\sigma) - K_1 f(\sigma) \tag{16}$$

ただし,

$$Q_1 > 0$$
$$K_1 > 0$$
$$f(\sigma) = \sigma$$

上記の条件を満たす. σ を微分すると,

$$\dot{\sigma} = SAx + SBu \tag{17}$$

が得られる. 式 (16) を代入すると, 制御入力は

$$u = -(SB)^{(-1)} \{SAx + Q_1 sgn(\sigma) + K_1 f(\sigma)\} \tag{18}$$

となる. このとき, 切換平面 σ にスライディングモードが存在することが分かる. 式 (16) に関するリアプノフ関数の候補を次のように選ぶ.

$$V = \frac{1}{2}\sigma^T \sigma \tag{19}$$

この関数の微分を考えると

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{1}{2}\dot{\sigma}^T\sigma + \frac{1}{2}\sigma^T\dot{\sigma} \\
&= \sigma^T\dot{\sigma} = \sigma^T\{-Q_1 sgn(\sigma) - K_1 f(\sigma)\} \\
&= -(\sigma Q_1 sgn(\sigma) + \sigma K_1 f(\sigma)) \\
&= -(Q_1\|\sigma\| + \sigma K_1 f(\sigma)) < 0 \qquad (20)
\end{aligned}
$$

を得る. これから $\dot{V}$ は負になることが分かり, システムは安定であると言える.

5　シミュレーション

LQR 制御とスライディングモード制御をシミュレーションにより比較する. 本研究では MATLAB を用いてシミュレーションを行った. シミュレーションでのセットアップを以下に示す.

$R = 1$

$Q = diag([3.4 \quad 10 \quad 0.02 \quad 2])$

$K = [-1.8439 \quad -71.4545 \quad -1.5889 \quad -8.7619]$

$Q_1 = 1$

$K_1 = 9$

と設定し, 状態変数の初期値は $x = [0.0 \quad 0.1 \quad 0.0 \quad 0.0]^T$ と決定した. ルンゲクッタ法を使用し, 微分方程式の近似解を求めた. シミュレーションは実行時間 5 秒間, 近似の間隔は 0.004[s] で行った. 車体の角度と, 制御入力の比較したグラフを図 4,5 に示す.

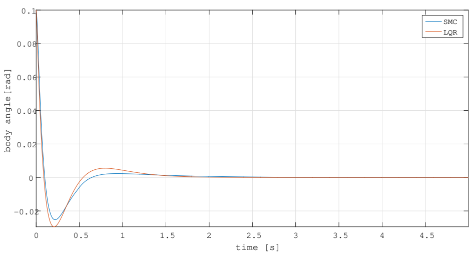

図 4　車体の角度

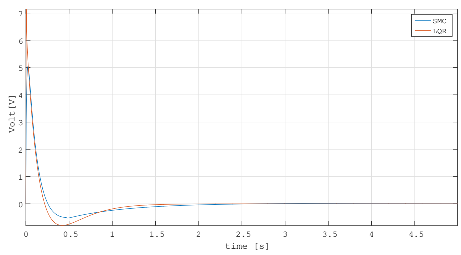

図 5　制御入力

6　カルマンフィルタ

実際のシステにおいて, システムノイズや観測ノイズといったノイズが存在し, システムに影響を与えている. そこで導出した線形モデルに対してカルマンフィルタを設計することでシステムの状態を推定し, ノイズの影響を除去した状態変数を得る.

カルマンフィルタを設計するにあたって, 連続型線形モデルをサンプリング時間 Δt で離散化する.

$$A_d = e^{\mathrm{A\Delta t}} \tag{21}$$

$$B_d = \int_0^{\Delta t} e^{\mathrm{A\Delta t}} \tag{22}$$

離散化した状態方程式は次式で表される.

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k] + w[k] \tag{23}$$
$$z[k] = Hx[k] + v[k] \tag{24}$$

ランダム信号の v[k],w[k] はそれぞれ, システムノイズ, 観測ノイズを示す. ノイズはそれぞれ無相関な白色雑音であり, 正規分布は以下に示す.

$$p(w) \sim N(0, Q_n) \tag{25}$$

$$p(v) \sim N(0, R_n) \tag{26}$$

ノイズ共分散に対する推定誤差の共分散を最小にするように選択する.

$$E[w[k]] = 0, E[v[k]] = 0 \tag{27}$$

$$E[w[k]w[k]^{\mathrm{T}}] = Q_n \tag{28}$$

$$E[v[k]v[k]^{\mathrm{T}}] = R_n \tag{29}$$

また, この時の推定誤差共分散は,

$$P_n = \lim_{k\to\infty} E(\{x[k] - \hat{x}[k]\}\{x[k] - \hat{x}[k]\}^{\mathrm{T}}) \tag{30}$$

を最小化する状態推定値 $\hat{x}$ をおく.

推定値 $\hat{x}[k]$ の初期値は, $\hat{x}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ とする. また, システムノイズ $w[k]$ の重み行列 Q_n, 観測ノイズ $v[k]$ の重み行列 R_n を以下のように定めた.

$$Q_n = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 \end{bmatrix}$$

$$R_n = diag([0.01\ 0.1\ 0.1\ 0.1])$$

カルマンフィルタを構築するにあたって文献 ([7],[8]) を参考にした.

車体の角度に対するシミュレーション結果を以下に示す.

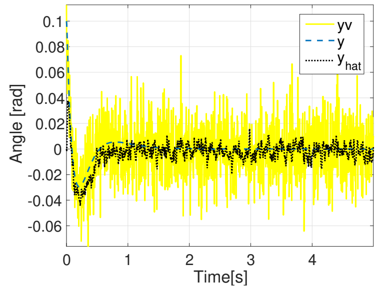

図 6　車体の角度 (LQR)

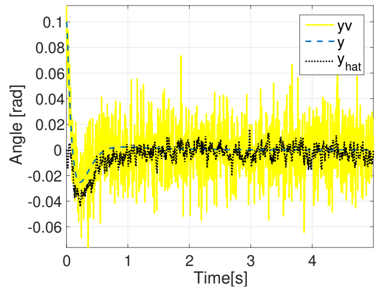

図 7　車体の角度 (SMC)

図 6 は,LQR 制御とカルマンフィルタによる出力, 図 7 は, スライディングモード制御とカルマンフィルタによる出力であり, 観測ノイズを除いた出力の理想値 y とノイズを含む出力 yv, 推定値の出力 $\hat{y}$ を比較したものである. 図 6, 図 7 より, 最大で約 0.06[rad] あるノイズを 0.01[rad] まで除去し, 理想の値に近い結果を出せているのがわかる.

7　おわりに

倒立振子に対して LQR 制御, スライディングモード制御を行いシミュレーションまで行った結果, これらの理論の有用性を実証し, 比較することができた. 比較を行った結果, また, オブザーバとしてカルマンフィルタを設計した結果, ノイズの効果を減少させることに成功した点からも制御の精度, モデルの安定性を向上させる手法であることをシミュレーションにより確認した.
今後の課題として,. カルマンフィルタにおいては, 実装する場合を考えると実際のノイズに対する Q_n と R_n の設計が挙げられる. また今回導出したカルマンフィルタは線形であり, 実機に実装となると非線形に対応できることが望ましい.

参考文献

[1] EVB-a Way to Replace the Brain of the LEGO Mindstorms EV3
https://www.instructables.com/id/EVB-A-way-to-replace-the-brain-of-the-LEGO-Mindsto/
最終アクセス日 2019 年 1 月 11 日

[2] Pavel Roslovets
Gyroboy-self-balancing two-wheel robot (segway) based on Lego EV3
https://jp.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/60322-gyroboy-self-balancing-two-wheel-robot-segway-based-on-lego-ev3
最終アクセス日 2019 年 1 月 11 日

[3] 陳幹
2018 年度 77375-001 機械電子制御工学実習 ロボット制御実験
https://www-p.st.nanzan-u.ac.jp/classes/2018/77375-001/robot2018.pdf
最終アクセス日 2018 年 10 月 14 日

[4] 川田昌克: 「MATLAB/Simulink による現代制御入力」. 森北出版株式会社, 東京,2011.

[5] 野波健蔵・田宏奇: 「スライディングモード制御ー非線形ロバスト制御の設計理論ー」. コロナ社, 東京,1994.

[6] Saqib Irfan, Adeel Mehmood, Muhammad Tayyab Razzaq, Jamshed Iqbal:
Advanced sliding mode control techniques for Inverted Pendulum: Modelling and simulation,Engineering Science and Technology. *International Journal*, Volume 21, Issue 4,2018,Pages 753-759,ISSN 2215-0986, https://doi.org/10.1016/j.jestch.2018.06.010.
(http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2215098617317822)
最終アクセス日:2018 年 1 月 11 日

[7] Zhang Wanli, Wang Lirong and Li Guoxin
"Research on the Control Method of Inverted Pendulum Based on Kalman Filter"
2014 IEEE 12th International Conference on Dependable,Autonomic and Secure Computing,Dalian,2014,pp.520-523.

[8] Math Works
カルマンフィルター処理-MATLAB & Simulink-MathWorks 日本
https://jp.mathworks.com/help/control/ug/kalman-filtering.html
最終アクセス日 2019 年 1 月 11 日