LMI 定式化で安定させる Anti-lock Braking System

2015SC019 樋口拓真 2015SC003 明石匡功

指導教員：陳幹

1　はじめに

ABS は強い非線形性をもち, 依存する変動パラメータに対しロバスト性を保証させるコントローラをもつ. ディスクリプタ表現によりパラメータ変動を局所的にしてパラメータ依存リアプノフ関数に基づいたゲインスケジューリング制御器を設計しスリップ率を安定化させる. 安定させるための重要なパラメータである路面摩擦係数とコーナリングフォースはスリップ率に依存し, 図 1 からスリップ率は 0.2 のとき路面摩擦係数とコーナリングフォースは最大となり最適値である. よって, 目標スリップ率を 0.2 とする [1][2].

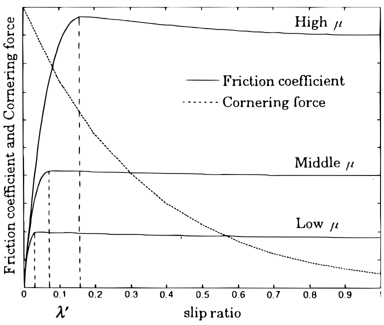

図 1　制動摩擦係数, コーナリングフォースとスリップ率の関係

2　モデリング

モデリングに用いる実験機の簡略図を図 2 に示す. 上の車輪は車の車輪, 下の車輪は道路を表している. 上の車輪にかかるブレーキングトルク τ_b を車輪間の摩擦係数が最大になるよう操作することでスリップ率を 0.2 に追従させる [3].

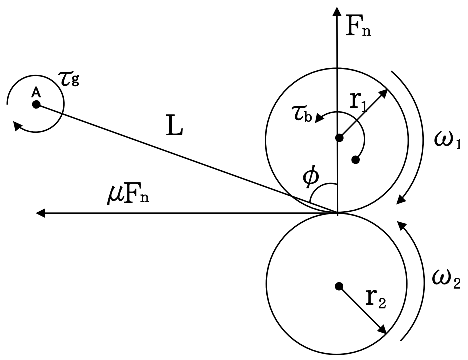

図 2　使用する実験機の簡略図

モデリングに用いるパラメータを表 1 に示す. 次に示す実験機のパラメータの中で使用する変動パラメータは二つの車輪の角速度, ブレーキトルク, 車輪間の摩擦係数, スリップ率である. また, 設計では実験機のパラメータを用いる. このとき摩擦係数はスリップ率に依存する.

表 1　物理パラメータ

ブレーキトルク	τ_b[N/m]
垂直効力	F_n[N]
上の車輪の半径	r_1[m]
下の車輪の半径	r_2[m]
上の車輪の角速度	ω_1[rad/s]
下の車輪の角速度	ω_2[rad/s]
上の車輪の慣性モーメント	J_1[kgm]
下の車輪の慣性モーメント	J_2[kgm]
車輪間の摩擦係数	μ
バランスレバーにかかるトルク	τ_g　[N/m]
バランスレバーから接地点までの距離	Ł　[m]
線分 L と車輪の接点の法線がなす角	φ　[rad]
スリップ率	λ

これから微分方程式の導出を行う. 上の車輪の回転運動式を次式のように示す.

$$J_1\dot{\omega}_1(t) = F_n r_1 \mu(\lambda) - \tau_b(t) \tag{1}$$

また, 下の車輪の回転運動式を次式のように示す..

$$J_2\dot{\omega}_2(t) = -F_n r_2 \mu(\lambda) \tag{2}$$

このときのスリップ率は, 次のように定義される.

$$\lambda(t) = \frac{r_2\omega_2(t) - r_1\omega_1(t)}{r_2\omega_2(t)} \tag{3}$$

垂直抗力は次式のように示せる.

$$F_n = \frac{\tau_g + \tau_b(t)}{L(\sin(\varphi) - \mu(\lambda)\cos(\varphi))} \tag{4}$$

(1), (2) 式に (4) 式をそれぞれ代入するとを次式のように示せる.

$$J_1\dot{\omega}_1(t) = \frac{\tau_g + \tau_b(t)}{L(\sin(\varphi) - \mu(\lambda)\cos(\varphi))} r_1 \mu(\lambda) - \tau_b(t) \tag{5}$$

$$J_2\dot{\omega}_2(t) = -\frac{\tau_g + \tau_b(t)}{L(\sin(\varphi) - \mu(\lambda)\cos(\varphi))} r_2 \mu(\lambda) \tag{6}$$

次にスリップ率の時間微分について考える. スリップ率の時間微分の関係を次のように示す.

$$\dot{\lambda}(t)\,\omega_2(t) = -\frac{r_1}{r_2}\dot{\omega}_1(t) + \frac{r_1\omega_1(t)}{r_2\omega_2(t)}\dot{\omega}_2(t) \tag{7}$$

(7) 式に (5) 式の $\dot{\omega}_1(t)$ について解いたものと (6) 式の $\dot{\omega}_2(t)$ について解いたものを代入してスリップ率について解いたものは非線形なので平衡点 ($\lambda*$, τ_b*) 周りで線形化したものを次のように示す．$\lambda*$ は目標スリップ率，τ_b* は目標スリップ率を維持するブレーキングトルクを表す．

$$\dot{\lambda} \simeq \dot{\lambda}(\lambda*, \tau_b*) + \frac{d\dot{\lambda}}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda*}(\lambda-\lambda*) + \frac{d\dot{\lambda}}{d\tau_b}|_{\tau=\tau_b*}(\tau_b-\tau_b*) \tag{8}$$

前式について解いたものを次のように示す．

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}\omega_2(t)\\
&= -(\tau_g+\tau_b*)(\frac{r_1^2}{J_1r_2}\frac{\frac{d}{d\lambda}\mu L\sin(\varphi)}{L^2(\sin(\varphi)-\mu(\lambda)\cos(\varphi))^2}\\
&\quad+\frac{r_2}{J_2}\frac{\frac{d}{d\lambda}\mu(\lambda)L\sin(\varphi)}{L^2(\sin(\varphi)-\mu\cos(\varphi))^2}\\
&\quad-\frac{r_2}{J_2}\frac{\frac{d}{d\lambda}\mu(\lambda)L\sin(\varphi)}{L^2(\sin(\varphi)-\mu\cos(\varphi))^2}\lambda*\\
&\quad-\frac{r_2}{J_2}\frac{\mu(\lambda)}{L(\sin(\varphi)-\mu\cos(\varphi))})(\lambda-\lambda*)\\
&\quad+(-\frac{r_1^2}{J_1r_2}\frac{\mu(\lambda)}{L(\sin(\varphi)-\mu\cos(\varphi))}\\
&+\frac{r_1}{J_1r_2}-\frac{r_2}{J_2}\frac{\mu(\lambda)}{L(\sin(\varphi)-\mu(\lambda)\cos(\varphi))}(1-\lambda*))(\tau_b-\tau_b*)
\end{aligned} \tag{9}$$

以下, (9) 式の $(\lambda-\lambda*)$ の係数を α, $(\tau_b-\tau_b*)$ の係数を β とする．
これで微分方程式の導出を完了する．

3 状態方程式の導出

次に制御器設計に用いる状態方程式を作成する [4]．出力を目標値に追従させるために制御ループ内に積分器を状態変数に入れた．拡大系の状態変数を次のように示す．

$$x(t) = [x_1(t)\ \ x_2(t)]^T = [\int(\lambda-\lambda*)dt\ \ \lambda-\lambda*]^T \tag{10}$$

入力を $u(t) = \tau_b - \tau_b*$ とするシステムの拡大系を次のように示す．

$$E(\omega_2(t))\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{11}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

(11) 式からわかるように, 行列である E が変動パラメータを含んでいるシステムということが分かる．そこで、ディスクリプタ方程式を使って変動パラメータを行列 A に持たせることで行列 E に変動パラメータを含まない形に変形する．

4 ディスクリプタ方程式の導出

ディスクリプタ方程式とは, 動的システムの数式モデルとして物理量を保存しながら, 静的拘束条件と動的要素と同時に複雑な変換をせず記述できるようモデル表現したものである．初めに, ディスクリプタ変数を次のように示す．

$$x_d(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} \tag{12}$$

このとき (12) 式から, ディスクリプタ方程式を次のように示す．

$$E_d\dot{x_d}(t) = A_d(\omega_2(t))x_d(t) + B_d\mu(t) \tag{13}$$

$$E_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

,

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & -\omega_2(t) \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

これでディスクリプタ表現を完了し, モデリングを終える．

5 ゲインスケジューリングコントローラ

変動パラメータである車体速度, すなわち下の車輪の角速度 ω_2 をスケジューリングパラメータとし, それを θ とおく．パラメータ依存リアプノフ関数に基づいたゲインスケジューリングコントローラを設計する．最適レギュレータ理論に基づく状態フィードバックゲインスケジューリング制御器を設計する．設計するにあたって使用する線形システムを次のように示す [5][6]．

$$\begin{cases} E_d\dot{x_d}(t) = A_d(\theta)x_d(t) + B_{dw}w(t) + B_du(t) \\ z(t) = C_dx_d(t) + D_du(t) \end{cases} \tag{14}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_{dw} = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$C_d = [\ W_x\ \ 0\ ], D_d = \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, W_x = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

このとき, $w(t)$ はインパルス外部入力, $z(t)$ は評価する出力, Q は状態変数の重み行列, R は入力の重みとし,Q と R は正方行列である．θ はスケジューリングパラメータであり,$\omega_2(t)$ に対応している．インパルス入力の初期値を w_0 とした時の制約を次に示す．

$$w_0w_0^T = I \tag{17}$$

評価関数 J を次のように示す．

$$J = \int_0^\infty (x(t)^TQx(t) + u(t)^TRu(t))dt \tag{18}$$

ここで入力について

$$u(t) = K_d(\theta)x_d \tag{19}$$

とし,$A_{d2}(\theta) = A_d(\theta)+B_dK_d(\theta)$,$C_{d2}(\theta) = C_d+D_dK_d(\theta)$ としたときのシステムを次のように示す.

$$\begin{cases} E_d\dot{x_d}(t) = A_{d2}(\theta)x_d(t) \\ z(t) = C_{d2}(\theta)x_d(t) \end{cases} \tag{20}$$

このシステムをリアプノフの安定論を用いて安定条件を導出する．リアプノフ関数を次に示す.

$$V(x_d(t)) = x_d(t)^T E_d^T P_d E_d x_d(t) \succ 0 \tag{21}$$

このときの条件を次のように示す.

$$P_d \succ 0, E_dP_d = (E_dP_d)^T \succeq 0 \tag{22}$$

リアプノフ関数の微分について次に示す.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_d(t)) &= \dot{x_d}(t)^T E_d^T P_d E_d x_d(t) + x_d(t)^T E_d^T P_d E_d \dot{x_d}(t) \\ &= x_d(t)^T (A_{d2}(\theta)^T P_d + P_d^T A_{d2}(\theta)) x_d(t) \end{aligned} \tag{23}$$

(23) のリカッチ行列からリアプノフ安定の条件を次のように示す.

$$A_{d2}(\theta)^T P_d + P_d^T A_{d2}(\theta) \prec 0 \tag{24}$$

よって次式を満たし, 漸近安定であることを示せる.

$$\dot{V}(x_d(t)) = x_d(t)^T (A_{d2}(\theta)^T P_d + P_d^T A_{d2}(\theta)) x_d(t) \prec 0 \tag{25}$$

次に,$X_d = P_d^{-1}$ としたとき (24) 式について左側から X_d^T, 右側から X_d をかけて次のように示す.

$$X_d^T A_{d2}(\theta)^T + A_{d2}(\theta)X_d + X_d^T C_{d2}^T C_{d2} X_d \prec 0 \tag{26}$$

schur の補題を用いて LMI（線形行列不等式) に変形したものを次に示す.

$$\begin{bmatrix} X_d^T A_{d2}(\theta)^T + A_{d2}(\theta)X_d & X_d^T C_{d2}^T \\ C_{d2}X_d & -I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{27}$$

$K_d(\theta)X_d = Y_d(\theta)$ としたとき (27) は次のように示せる.

$$M = Y_d(\theta)^T B_d(\theta)^T + X_d^T A_{d2}(\theta) + A_{d2}(\theta)X_d + B_dY_d(\theta) \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} M & Y_d(\theta)^T D_d^T + X_d^T C_d^T \\ C_dX_d + D_dY_d(\theta) & -I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{29}$$

次にリアプノフ行列 X_d と行列 Y_d を次のように定義する.

$$X_d = \begin{bmatrix} X & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$Y_d(\theta) = \begin{bmatrix} Y(\theta) & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

このとき次のような条件を導出する,

$$X > 0 \tag{32}$$

X^{-1} の上限値を W として次の関係を導出する. このとき,γ は評価関数の上限値と定義する.[4] の成果から引用する.

$$X^{-1} \prec W \tag{33}$$

$$trace[W] \prec \gamma \tag{34}$$

ここで (33) 式,(34) 式に Schur の補題を用いて

$$\begin{bmatrix} W & I \\ I & X \end{bmatrix} \succ 0 \tag{35}$$

$Y(\theta)$ は次のように表せる.

$$Y(\theta) = Y_0 + \theta Y_1 \tag{36}$$

変動するパラメータ θ について, すべての状況でロバスト性を保証するため最小の θ の値を $\underline{\theta}$, 最大の値を $\overline{\theta}$ とする. この安定条件から LMI 定式化を行う. 評価関数 J を最小とするゲインスケジューリングコントローラを求める LMI 条件を (37)〜(42) 式に示す.

$$minimize : \gamma \tag{37}$$

$$subject\,to : X \succ 0 \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 & Y_d(\overline{\theta})^T D_d^T + X_d^T C_d^T \\ C_dX_d + D_dY_d(\overline{\theta}) & -I_{3*3} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{39}$$

$G_1 = Y_d(\overline{\theta})^T B_d^T + X_d^T A_d(\overline{\theta})^T + A_d(\overline{\theta})X_d + B_dY_d(\overline{\theta})$ とする.

$$\begin{bmatrix} G_2 & Y_d(\underline{\theta})^T D_d^T + X_d^T C_d^T \\ C_dX_d + D_dY_d(\underline{\theta}) & -I_{3*3} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{40}$$

$G_2 = Y_d(\underline{\theta})^T B_d^T + X_d^T A_d(\underline{\theta})^T + A_d(\underline{\theta})X_d + B_dY_d(\underline{\theta})$ とする.

$$\begin{bmatrix} W & I \\ I & X \end{bmatrix} \succ 0 \tag{41}$$

$$trace[W] \prec \gamma \tag{42}$$

この変動パラメータ θ 範囲内で上の条件を満たす X_d,$Y_d(\theta)$ が存在するとき漸近安定である. 次式をゲインスケジューリングコントローラとし, 制御器設計を完了する.

$$K_d(\theta) = \begin{bmatrix} Y(\theta)X^{-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

6　シミュレーション

初めに, 比較的乾いた路面のような状況である上の車輪と下の車輪の摩擦係数が約 0.6 のときのスリップ率について図 3 に示す. シミュレーションの際の状態変数の重みは $Q = 80$, 入力の重みは $R = 0.05$ としスケジューリングパラメータについて $10 < \omega_2 < 50$ という範囲で行った.

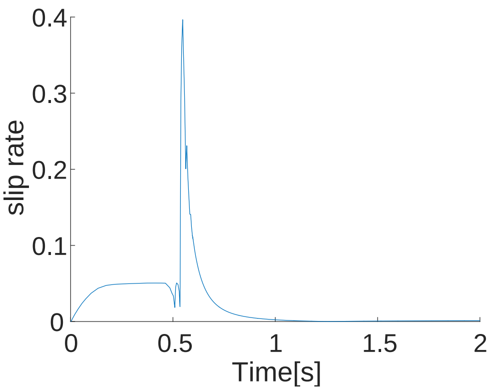

図 3　摩擦係数が約 0.6 のときのスリップ率のシミュレーションの結果

図 3 からスリップ率が 0.2 に収束はしていない. しかし、ブレーキトルクは正常にかかっているので十分にブレーキはかかっていて,ABS の機能は果たしていると考察した.
次に, より滑りやすい路面である摩擦係数が約 0.4 の時のスリップ率について図 4 に示す.

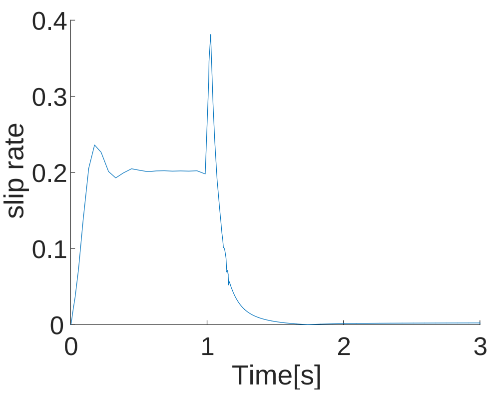

図 4　摩擦係数が約 0.4 のときのスリップ率のシミュレーションの結果

図 4 に示すようにスリップ率は 0.2 に収束しているが,$t = 1$ を過ぎると乱れていることがわかる. しかし, これは車体速度が十分に収束したためと考え,ABS としての機能は果たしていると考察した.

次に, より滑りやすい路面である摩擦係数が約 0.1 のときのスリップ率について図 5 に示す.

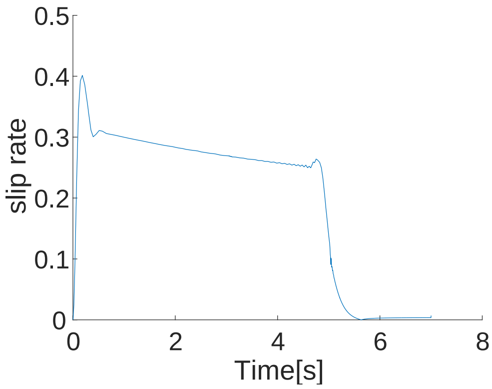

図 5　摩擦係数が約 0.1 のときのスリップ率のシミュレーションの結果

図 5 に示すようにスリップ率は 0.2 に向かっているが収束には至っていない.

7　おわりに

本研究での成果は,ABS の数学モデルの導出, ゲインスケジューリング制御の LMI 条件の導出である.

参考文献

[1] 中西順三,“ 自動車用 ABS の研究 ”, 山海堂出版, 東京,1993.

[2] 横山誠, 岩田義明, 片寄真二, 今村政道, 新部誠,“ スライディングモード制御によるアンチロックブレーキシステム ” 日本機械学会論文集 (C 編),63 巻 611 号 (1997-7)No.96-0678.

[3] INTECO:The laboratory Anti-lock Braking System User Manual, https://a-lab.ee/man/ABS-user-manual.pdf(最終アクセス日 1 月 11 日,2019)

[4] 2010se274 山崎久嗣,“ Anti-lock Braking System のゲインスケジューリング制御 ”, 南山大学情報理工学部システム創成工学科, 卒業論文, 高見研究室, ” ,2014

[5] T. A. Johansen, I. Petersen, J. Kalkkuhl and J. Ludemann, ”Gain-scheduled wheel slip control in automotive brake systems,” in IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 11, no. 6, pp. 799-811, Nov. 2003.

[6] I. Petersen, T. A. Johansen, J. Kalkkuhl and J. Ldemann, ”Wheel slip control using gain-scheduled LQ − LPV/LMI analysis and experimental results,” 2003 European Control Conference (ECC), Cambridge, UK, 2003, pp. 880-885.