

三自由度磁気浮上システムに対する部分空間同定法の適用

2014sc096 余語 紘行

指導教員：高見 勲

1 はじめに

本研究では、三自由度磁気浮上システムに対して部分空間同定法を適用し、2入力2出力の線形離散時間状態空間モデルを導出する。円盤型永久磁石はリング型永久磁石から中心付近で浮上させる上向きの力を受けるが、このままだと不安定なため下に配置されている4つの電磁石で水平方向の制御を行い安定化させる。不安定なシステムを扱うために、適当なコントローラを使用し、安定化させた状態でシステム同定を行う。文献[1]の閉ループ同定を参考に、直交分解により定義された確定成分による部分空間同定法を使用し、結合入出力法を用いてプラントの状態空間モデルを求める。このシステムは非線形性をもつが、制御範囲はシステムの中心近傍のみで十分であると考え、線形モデルの導出を行う。実験機にはさらにz軸方向の制御が行えるようにセンサーと電磁石が取り付けられており三自由度で制御が行えるが、本研究ではそれらを使用せず二自由度のモデリングを考える。使用する記法として \hat{z} は推定値、 Z^d は確定成分、 Z_k はkから始まる時系列のブロック行列を表している。 $Z_{0|k-1}$ は0からk-1までのブロックハンケル行列を示している。列数はデータ数と同じであるため省略している。使用する磁気浮上システムの実験機の構成を図1に示す。

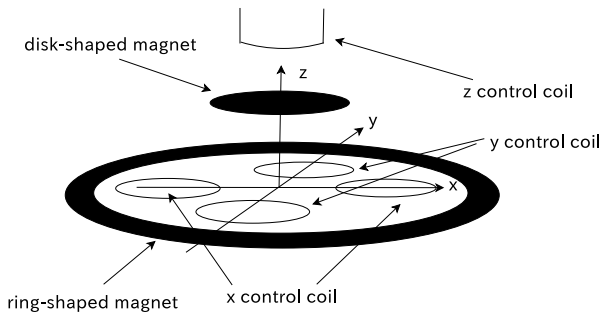


図1 磁気浮上システムの構成

2 システム同定の方法

2入力2出力システムに対し、閉ループの状態の部分空間同定法を適用する。位置(x, y)の値をセンサーで取得し、フィードバック制御を行っている。システムを同定するにあたり、センサーから取得した出力とプラントへの制御入力にそれぞれ既知の外生入力信号 r_1 を r_2 を加える。システムのブロック線図を図2に示す。 $P(z)$ はプラントで $C(z)$ はコントローラの伝達関数である。

部分空間同定法で使用する外生信号と結合入出力の確定

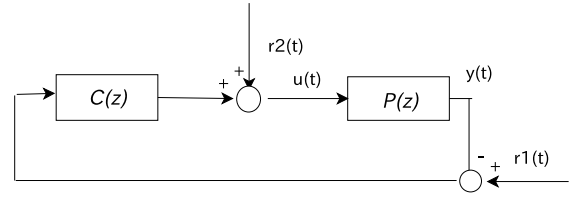


図2 システムのブロック線図

成分からなる状態空間モデルを次に示す。

$$\begin{aligned} x_d(t+1) &= Ax_d(t) + Br(t) \\ w_d(t) &= Cx_d(t) + Dr(t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$w_d(t) = \begin{bmatrix} y_d(t) \\ u_d(t) \end{bmatrix}, r(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times l}, C \in R^{l \times n}$$

取得したデータから確率的な要素を直行射影を利用して除去することにより、確定成分の部分空間同定法でプラントのパラメータを求めることができる。状態空間モデルから次の行列入出力方程式が求められる。

$$W_{k|2k-1}^d = O_k X_k^d + \Psi_k R_{k|2k-1} \quad (2)$$

$$O_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{k-2}B & CA^{k-3}B & CA^{k-4}B & \dots & D \end{bmatrix}$$

データ行列から結合入出力の確定成分を求めるためにLQ分解を使用する。LQ分解はQR分解から次のように定義される。

$$A^T = QR, A = R^T Q^T, L = R^T$$

Lは下三角行列、Qは直行行列である。外生信号と結合入出力からブロックハンケル行列を作成し、LQ分解する。

$$\begin{bmatrix} R_{k|2k-1} \\ R_{0|k-1} \\ W_{0|k-1} \\ W_{k|2k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix}$$

結合入出力の確定成分は、 $W_{0|2k-1}$ を $R_{0|2k-1}$ の生成する空間へ直行射影することで、推定値を得ることができる。

これを考慮して L, Q^T との関係から確定成分は次の式で表される.

$$\hat{W}_{k|2k-1}^d = L_{41}Q_1^T + L_{42}Q_2^T \quad (3)$$

よって,

$$O_k \hat{X}_k^d + \Psi_k R_{k|2k-1} = L_{41}Q_1^T + L_{42}Q_2^T \quad (4)$$

であるため, $Q_1^T Q_2 = 0, Q_2^T Q_2 = I$ より $L_{42} = O_k \hat{X}_k^d Q_2^T$ を得る. この L_{42} を特異値分解,

$$L_{42} = [\hat{U} \quad \tilde{U}] \begin{bmatrix} \hat{S} & 0 \\ 0 & \tilde{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}^T \\ \tilde{V}^T \end{bmatrix} \quad (5)$$

することで得た拡大可観測行列 $O_k = \hat{U} \hat{S}^{\frac{1}{2}}$ から,

$$C = O_k(1:l,:) \quad (6)$$

$$O_{k-1}A = O_k(l+1:kl,:) \quad (7)$$

を利用して, A, C を得ることができる. また,

$$\tilde{U}^T \Psi_k = \tilde{U}^T L_{41} L_{11}^{-1} \quad (8)$$

を最小二乗法で解くことにより, B, D を得ることができる. ここで同定するプラントの状態空間モデルを次に示す.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A_p x(t) + B_p u(t) \\ y(t) &= C_p x(t) \end{aligned} \quad (9)$$

B, C, D を,

$$B = [B_1 \quad B_2], C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

とおくとき, プラントの状態空間モデルのパラメータ A_p, B_p, C_p は,

$$A_p = A - B_2 D_{22}^{-1} C_2, B_p = B_2 D_{22}^{-1}, C_p = C_1$$

で得ることができる.

3 実験結果

三自由度磁気浮上システムから実際にデータを取得し, システムのプラントの状態空間モデルを得る. サンプル周期 $1/2048$ [s] で入出力データを取得し 40 秒の実験を行う. 実験機で取得できるデータ数の上限が 20480 個であるため, 30 から 40[s] の 10 秒間のデータを同定に利用した. $x(t), y(t)$ の 2 出力の時系列データ, $u_x(t), u_y(t)$ の 2 入力の時系列データをシステム同定として用いる. $N = 19900$, $k = 8$ で同定実験を行い, 出力にはインパルス信号のような外生信号を 1[s] 周期で加え, 入力には擬似白色雑行列 A の次数は L_{42} の特異値の分布図 3 から 6 次と決定した. 同定結果として, 行列 A_p の固有値を図 4 に示す. 不安定系であるが安定な固有値がでたが, これは非線形性をもつ不安定系から線形の状態空間モデルを無理やり導出したためであると考えられる.

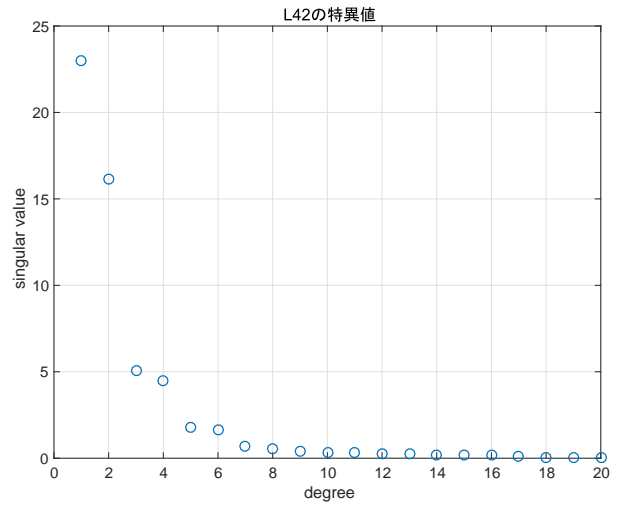


図 3 行列 L_{42} の特異値の分布

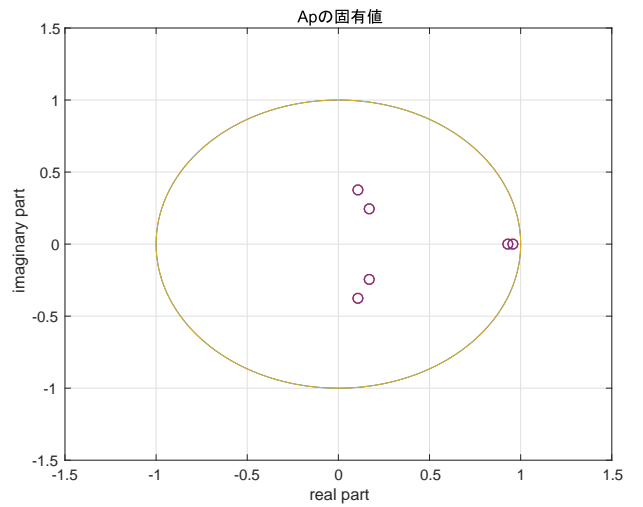


図 4 行列 A_p の固有値

4 おわりに

磁気浮上の実験で得たデータを用いて, 直交分解による確定成分の部分空間同定法を使用し, 2 入力 2 出力の状態空間モデルを導出した. システムは不安定系であるが同定したモデルは安定系となり正確なものではないことがわかる. 今後の研究課題として部分空間同定法によって作成した状態空間モデルに含まれるモデルの不確かさを考慮した制御器設計が挙げられる.

参考文献

- [1] 片山徹:『システム同定-部分空間法からのアプローチ-』. 朝倉書店, 東京, 2004.