スライディングモード制御を用いた Control Moment Gyroscope の目標値追従制御

2014SC031 河瀬慎太朗

指導教員：高見勲

1　はじめに

Control Moment Gyroscope(以下,CMG) は, 入力よりも出力の数が多い劣駆動システムである.CMG の中でも, 中心に取り付けられた回転速度が可変のホイールと, ホイールの外側に取り付けられた 2 つのジンバルで構成される CMG を可変速 2 軸ジンバル CMG(VSDGCMG) といい,1 台用いることで宇宙機を 3 軸制御できる [1]. しかし,VSDGCMG の制御は, 非線形システムが複雑であり, 特異点が存在するなどの問題がある. このようなシステムに対し, 先行研究ではスライディングモード制御を用い,Gimbal3 を固定した状態で Gimbal2 と Gimbal4 の制御をおこなっている [2]. 本研究では,VSDGCMG の制御で問題となる, 複雑な非線形システムにスライディングモード制御を用いて制御器の設計をおこない,Gimbal2 を可動域で回転させ,Gimbal3 と Gimbal4 を制御する. そして, 実験により理論の有用性を検証する.

2　モデリング

図 1 に CMG の概略図を示す.

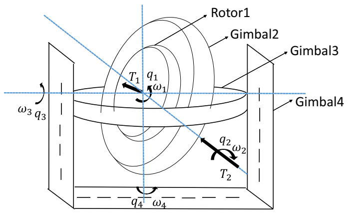

図 1　CMG 概略図

Rotor1 のモータのトルクを T_1[Nm], Gimbal2 のモータのトルクを T_2[Nm], Gimbal2 に対する Rotor1 の角度を $q_1(t)$[rad], Gimbal3 に対する Gimbal2 の角度を $q_2(t)$[rad], Gimbal4 に対する Gimbal3 の角度を $q_3(t)$[rad], CMG の土台に対する Gimbal4 の角度を $q_4(t)$[rad] とする.$\omega_1(t)$[rad/s], $\omega_2(t)$[rad/s], $\omega_3(t)$[rad/s], $\omega_4(t)$[rad/s] をそれぞれ Rotor1 から Gimbal4 の角速度とする. ここで, 仮想の入力 $u_1 = \dot{\omega}_1, u_2 = \dot{\omega}_2, u_1' = \dot{\omega}_3, u_2' = \dot{\omega}_4$ を定義し, 以下に制御対象システムを示す.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \dot{\omega}_1 \\ u_2 = \dot{\omega}_2, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ccc} \dot{q}_3 & = & \omega_3 \\ \dot{\omega}_3 & = & u_1' \\ \dot{q}_4 & = & \omega_4 \\ \dot{\omega}_4 & = & u_2' \end{array} \right. \tag{1}$$

本研究では, ラグランジュの運動方程式により CMG のモデルを導出する.

式 (2)-(5) に Rotor1 から Gimbal4 の運動方程式を示す.

$$\begin{aligned} &I_{R1y}(u_1 + u_1' \cos q_2 - \omega_2\omega_3 \sin q_2 + u_2' \sin q_2 \cos q_3 \\ &\quad + \omega_2\omega_4 \cos q_2 \cos q_3 - \omega_3\omega_4 \sin q_2 \sin q_3) = T_1 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &I_1(u_2 - u_2' \sin q_3 - \omega_3\omega_4 \cos q_3) + (I_2 - I_3)(\omega_3^2 \sin q_2 \cos q_2 \\ &\quad - \omega_3\omega_4 \cos 2q_2 \cos q_3 - \omega_4^2 \sin q_2 \cos q_2 \cos^2 q_3) \\ &\quad + I_{R1y}\omega_1(\omega_3 \sin q_2 - \omega_4 \cos q_2 \cos q_3) = T_2 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &I_{G3y}u_1' + I_{R1y}(u_1 \cos q_2 - \omega_1\omega_2 \sin q_2 \\ &\quad + \omega_1\omega_4 \sin q_2 \sin q_3) + I_2(u_1' \cos^2 q_2 \\ &\quad + \omega_4^2 \sin^2 q_2 \sin q_3 \cos q_3) + I_3(u_1' \sin^2 q_2 \\ &\quad + \omega_4^2 \cos^2 q_2 \sin q_3 \cos q_3) \\ &\quad - I_4\omega_4^2 \sin q_3 \cos q_3 - I_1(\omega_4^2 \sin q_3 \cos q_3 \\ &\quad - \omega_2\omega_4 \cos q_3) + (I_2 - I_3)(-\omega_2\omega_3 \sin 2q_2 \\ &\quad + u_2' \sin q_2 \cos q_2 \cos q_3 + \omega_2\omega_4 \cos 2q_2 \cos q_3) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &I_{G4z}u_2' + I_{G3x}u_2' \sin^2 q_3 + I_{G3z}u_2' \cos^2 q_3 \\ &\quad - I_1(u_2 \sin q_3 + \omega_2\omega_3 \cos q_3 - u_2' \sin^2 q_3) \\ &\quad + (I_4 + I_1)\omega_3\omega_4 \sin 2q_3 + I_2(u_2' \sin^2 q_2 \cos^2 q_3 \\ &\quad - \omega_3\omega_4 \sin^2 q_2 \sin 2q_3) + I_{R1y}(u_1 \sin q_2 \cos q_3 \\ &\quad + \omega_1\omega_2 \cos q_2 \cos q_3 - \omega_1\omega_3 \sin q_2 \sin q_3) \\ &\quad + I_3(u_2' \cos^2 q_2 \cos^2 q_3 - \omega_3\omega_4 \cos^2 q_2 \sin 2q_3) \\ &\quad + (I_2 - I_3)(\omega_2\omega_4 \sin 2q_2 \cos^2 q_3 + u_1' \cos q_2 \\ &\quad \sin q_2 \cos q_3 + \omega_2\omega_3 \cos 2q_2 \cos q_3 \\ &\quad - \omega_3^2 \sin q_2 \cos q_2 \sin q_3) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

ただし,I_1, I_2, I_3, I_4 は次のように与えられる.

$I_1 = I_{G2x} + I_{R1x}, I_2 = I_{G2y} + I_{R1y}, I_3 = I_{G2z} + I_{R1z},$
$I_4 = I_{G3x} - I_{G3z}$

3　制御器設計

本研究では,Rotor1 と Gimbal2 の制御を考えないため,2 入力 4 出力のシステムを 2 入力 2 出力のシステムとして扱う. また,u_1, u_2, u_1', u_2' を定義する.u_1, u_2 は Rotor1,Gimbal2 の仮想的な駆動トルク,u_1', u_2' は Gimbal3,Gimbal4 の仮想的な駆動トルクであり, 実際の駆動トルク T_1, T_2 を u_1, u_2 及び u_1', u_2' の関係式から求める. まずスライディングモード制御を用いて u_1', u_2' がリアプノフ安定となるように求め, 次に u_1, u_2, 最後に T_1, T_2 を求める. スライディングモードの到達条件は切換面 $S_i(x)$ $(i = 1, 2)$ に対してリアプノフ関数 $V_i(x) = \frac{1}{2}S_i(x)^2$ を定義したとき $\dot{V}_i(x) = S_i(x)\dot{S}_i(x) < 0$ を満たす時である. これを満たす到達則 $\dot{S}_1$,$\dot{S}_2$ を定義し, 切換面 S_1,S_2 を一階微分したものと比較し,u_1',u_2' を導出する. 偏差と切換面を以下のように定義する. ただし $C_1 > 0, C_2 > 0$ である.

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = q_3 - q_{3d} \\ S_1 = C_1 e_1 + \dot{e}_1, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} e_2 = q_4 - q_{4d} \\ S_2 = C_2 e_2 + \dot{e}_2 \end{array} \right. \tag{6}$$

$\dot{V}_i(x) < 0 \quad (i = 1, 2)$ を満たす到達則 $\dot{S}_1$,$\dot{S}_2$ は以下に定義する．
$\dot{S}_1 = -k_1 S_1 - \eta_1 \mathrm{sgn}(S_1) \quad (k_1 > 0, \eta_1 > 0)$
$\dot{S}_2 = -k_2 S_2 - \eta_2 \mathrm{sgn}(S_2) \quad (k_2 > 0, \eta_2 > 0)$
到達則をこのように定義することにより，
$\dot{V}_i(x) = S_i(x)\dot{S}_i(x) = -k_i S_i(x)^2 - \eta_i \mathrm{sgn}(S_i(x))^2 |S_i(x)|$
$= -k_i S_i(x)^2 - \eta_i |S_i(x)| < 0 \quad (k_i > 0, \eta_i > 0, i = 1, 2)$
となる．S_1,S_2 の一階微分と到達則を比較し,u_1',u_2' を求める．よって,

$$u_1' = \ddot{q}_{3d} - C_1 \dot{e}_1 - k_1 S_1 - \eta_1 \mathrm{sgn}(S_1) \tag{7}$$
$$u_2' = \ddot{q}_{4d} - C_2 \dot{e}_2 - k_2 S_2 - \eta_2 \mathrm{sgn}(S_2) \tag{8}$$

である．また, チャタリング防止策として以下の変換をおこなう．

$$\mathrm{sgn}(S_1) \Rightarrow \frac{S_1}{|S_1| + \delta_1}, \mathrm{sgn}(S_2) \Rightarrow \frac{S_2}{|S_2| + \delta_2} (\delta_1, \delta_2 > 0)$$

式 (4),(5) より下式 (9) を得る．

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = F^{-1} \left(E \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} - G \right) \tag{9}$$

ただし,$E_{2\times2}, F_{2\times2}, G_{2\times1}$ は $q_1 \sim q_4$,$\omega_1 \sim \omega_4$ の関数として与えられる．
次に, 式 (2),(3) より下式 (10) を得る．

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + J \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} + L \tag{10}$$

ただし,$H_{2\times2}, J_{2\times2}, L_{2\times1}$ は $q_1 \sim q_4$,$\omega_1 \sim \omega_4$ の関数として与えられる．
式 (6),(7),(8),(9),(10) よりトルク T_1,T_2 が求められる．

4　実験結果

以下に Gimbal3 と Gimbal4 の指令軌道を示す．

$$q_{3d} = \frac{\pi}{6(1 + \mathrm{e}^{-t})} + \frac{\pi}{12} \tag{11}$$

$$q_{4d} = \begin{cases} 0 & (t < 2) \\ -\frac{1}{10}\sin(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{10} & (t < 8) \\ \frac{1}{5} & (otherwise) \end{cases} \tag{12}$$

図 2, 図 3-5 に Rotor1 の角速度の時間応答,Gimbal2,Gimbal3,Gimbal4 の角度の時間応答を示し，図 6, 図 7 に Rotor1 と Gimbal2 のモータのトルクの時間応答を示す. 図 4,5 より Gimbal3,4 の角度が目標値に追従していることが分かる．図 6 で Rotor1 のトルクがずれている原因としては,Rotor1 が時間が経過するにつれ加速しているためだと考えられる．また Rotor1 が加速する原因として,Gimbal3 と Gimbal4 の角度の誤差が 0 になっていないことで, 切換面が 0 に収束せず, そのため入力が 0 に収束しないことにより,Rotor1 が加速してしまうと考えられる．

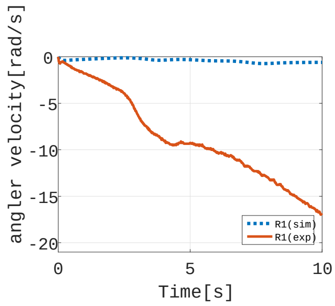

図 2　ω_1 の時間応答

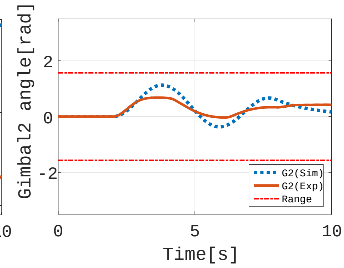

図 3　q_2 の時間応答

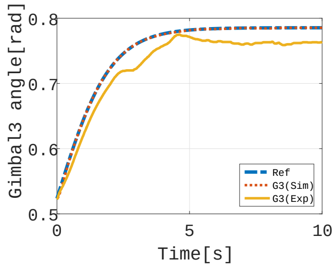

図 4　q_3 の時間応答

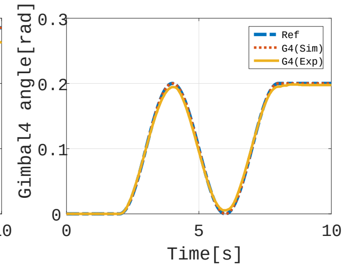

図 5　q_4 の時間応答

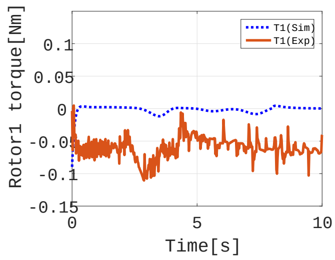

図 6　トルク T_1 の時間応答

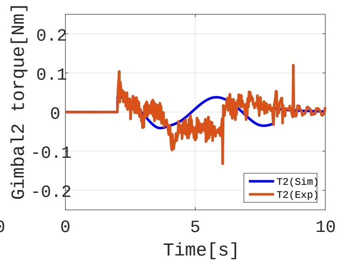

図 7　トルク T_2 の時間応答

5　おわりに

CMG に対して 4 つの仮想の駆動トルク u_1, u_2, u_1', u_2' を定義し,2 段階の入力変換により駆動トルク T_1, T_2 を求め, スライディングモード制御を適用し, 実験をおこない理論の有用性を検証した．

参考文献

[1] 塚原拓矢, 山田克彦, 莊司泰弘, 可変速 2 軸ジンバル CMG の特異点の回避/通過則について, 日本航空宇宙学会, 航空宇宙技術,Vol.15,pp.53-61,(2016)

[2] 神谷直樹,Control Moment Gyroscope の適応追従型スライディングモード制御, 南山大学情報理工学部システム創成工学科,(2017).