複素解析関数の特異点の探索と留数の計算法

2014SS083 高棹　義裕

指導教員：杉浦洋

1　はじめに

現代のコンピュータにおいて，高速な数値計算ができるのは，実数を浮動小数点数で近似して計算を行うからである．しかし，近似であるため厳密に正しいことが保証されていない．そこで，計算結果がどのくらい正しいか検算することが重要になってくる．これを精度保証付き数値計算という．

さて，関数の正則性は数学的に重要な概念である．また，複素計算の誤差解析においては，ある領域で与えられた関数が正則であるかどうかが基本的に重要である．したがって，与えられた関数について，領域内の特異点を自動的に検出し，その関数が正則な部分領域を確定することは重要である．また，検出した特異点の留数が精度保証付きで計算できれば，様々な応用が期待できる．

特異点の検出には，加藤 [1] と柴田 [2] の開発した正則性フラグ付き円板演算システムを用いる．

留数の計算には，柴田 [2] の留数の精度保証付き計算法を用いる．

2　正則性フラグ付き円板解析

中心 $c \in \mathbb{C}$，半径 $r \in \mathbb{R}$ の複素閉円板領域を

$$Z = \langle c; r\rangle = \{z : |z - c| \le r\} \tag{1}$$

と表し，以後これを単に円板と呼ぶ．円板全体の集合を $\mathbb{KC} = \{\langle c; r\rangle : c \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}, r \ge 0\}$ と書く．

1 変数複素関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，円板関数 $\hat{f} : \mathbb{KC} \to \mathbb{KC}$ が $f(\langle c; r\rangle) \subset \hat{f}(\langle c; r\rangle)$ を満たすとき，$\hat{f}$ は f の円板関数であるという．多変数複素関数に関しても同様である．

円板演算システムは，初等関数の円板関数を簡単に構成するシステムである．

加藤は，円板に正則性フラグ（Rflag）を付加した．Rflag は，円板関数が入力円板で正則かどうか知らせる．入力円板が関数の特異点を含まないと保証されれば，Rflag = True，保証されなければ，Rflag = False を出力円板に付加する．入力円板で Rflag = False ときは，無条件に出力円板に Rflag = False を付加する．

3　特異点の探索とクラスター化

正方形領域 D で定義された複素関数 $f(z)$ が D の中に有限個の孤立特異点を持つとき，各特異点を小円板で囲い込むことを考える．

正方形領域の各辺を n 等分し，n^2 個の小正方形全体のリストを

$$S = \{S_k\}_{k=1}^{n^2}$$

とし，各 S_k で $f(z)$ が正則かどうかを円板算法システムで判定する．すなわち，S_k の外接円板を f の円板関数に入力し，正則性フラグが False なら S_k をリスト S に残す．正則であると判定された S_k の中には特異点は絶対存在しないので，S から S_k を除き，残った小正方形のリスト

$$S = \{S_k\}_{k=1}^{K}$$

を得る．S の要素 S_k を特異正方形と呼ぶ．

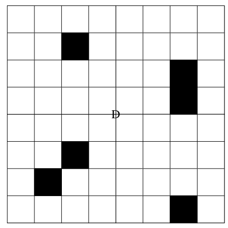


図 1　検出された特異正方形（黒）

しかし，最初から領域を n^2 個の小正方形に分割するのは計算量の観点から得策ではない．そこで，本研究では 2 分法的なアルゴリズムを採用し，計算効率を上げている．

特異正方形の和集合の連結成分をクラスターと呼び，クラスターのリストを $C = \{C_j\}_{j=1}^{J}$．

クラスター C_j を含む半径最小の円板を B_j とし，B_j のリストを $B = \{B_j\}_{j=1}^{J}$ とする．$B_i \cap B_j \neq \emptyset$ となる i, j が分かれば，B_i, B_j をリストから消去して，B_i, B_j を含む最小円板で置き換える．

この操作を，全ての $B_i, B_j \in B$ について，$B_i \cap B_j = \emptyset$ となるまで繰り返し，特異点の被覆円板の集合

$$B = \{B_i\}_{i=1}^{I}$$

を得る．

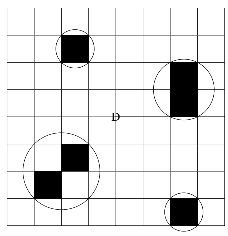


図 2　非正則領域 D_s と被覆円板 B_i

4　留数とその精度保証付き計算法

特異点の被覆円板 $B_i = \langle \beta_i, r_i\rangle$ に含まれる特異点の留数和を精度保証付きで求める．

柴田 [2] は，点 α を中心とする円環領域 A:$r_I < |z-\alpha| < r_O$ の閉包 $\bar{A}$ を含む領域 $D \supset \bar{A}$ で正則な関数 $f(z)$ に対し，円板 $|z - \alpha| \le r_I$ 内の特異点の留数和 $\mathrm{Res}[f; A]$ を精

度保証付きで求めるアルゴリズムを開発した．このアルゴリズムを $\alpha=\beta_i, r_i<r_I<r_O$ として用いる．

$$R_i=\min\left\{\beta_i と \partial D との距離, \min_{j\neq i}\{|\beta_j-\beta_i|-r_j\}\right\}$$

とし，

$$r_i<r_I<r_O<R_i$$

とすれば，円環領域 A で f は正則になる．

柴田 [2] の精度保証の原理は，次の定理による．

［定理］柴田のアルゴリズムによる近似留数 $c_{-1}^{(n)}$ について，$r=r_*=\sqrt{r_I r_O}$ と置くと，

$$|c_{-1}^{(n)}-\mathrm{Res}[f;A]|\leq\frac{M_I r_I+M_O r_O}{1-\rho^n}\rho^n \tag{2}$$

である．ここで，

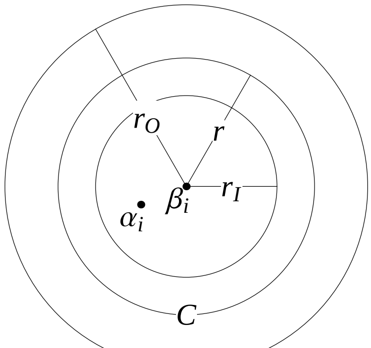
$$M_I=\max_{|z-\alpha|=r_I}|f(z)|, M_O=\max_{|z-\alpha|=r_O}|f(z)|, \rho=\sqrt{r_I/r_O} \tag{3}$$

である．

不等式 (3) の右辺は小さい方が良いので，$M_I, M_O, \rho=\sqrt{r_I/r_O}$ は小さい方が良い．M_I を小さくするため，r_I は大きい方が良い．M_O を小さくするためには，r_O は小さい方が良い．さらに，ρ を小さくするためには，r_I/r_O を小さくする必要がある．これらを適度に満足させるため，本研究では，

$$r_I=r_i(R_i/r_i)^{1/3}, r_O=r_i(R_i/r_i)^{2/3} \tag{4}$$

とした．



5　数値実験

3 節，4 節のアルゴリズムに従って，関数 $f(z)$ の特異点の被覆円板 B_i $(1\leq i\leq I)$ を自動生成し，B_i 内の特異点の留数和を精度保証付きで計算する関数 $AutoRes[F,S,rmin,n]$ を作成した．入力引数は，

F : f の円板関数，

S : 正方形領域，

$rmin$: 特異点を探索する円板の最小半径，

n : 留数計算に用いる標本点数

である．

出力は特異点の被覆円板 B_i $(1\leq i\leq I)$ と B_j 内の特異点の留数和 $Res[f,B_i]$ の精度保証円板 R_i である．

[実行例]　関数 $f(z)=1/\sin z$ を領域 $S=[-4,4]\times[-4,4]$ で調べた．S における $f(z)$ の特異点は $-\pi,0,\pi$，その留数は順に $-1,1,-1$ である．$f(z)$ の円板関数 $F(z)$ を作成し，$rmin=0.1, n=10$ として $AoutRes$ を実行した．

この問題に対する $AoutRes$ の出力は

$$\begin{aligned}
B_1&=\langle-3.1875;0.14\rangle\\
Res[f;B_1]&=\left\langle-1-i9.4\times10^{-18},6.8\times10^{-4}\right\rangle\\
B_2&=\langle0;0.18\rangle\\
Res[f;B_2]&=\left\langle1,1.9\times10^{-4}\right\rangle\\
B_3&=\langle3.1875;0.14\rangle\\
Res[f;B_3]&=\left\langle-1-i1.9\times10^{-18},6.8\times10^{-4}\right\rangle
\end{aligned}$$

3 点の特異点は全て分離して円板で囲い込むことが出来た．また，精度保証付きで求めることが出来た．

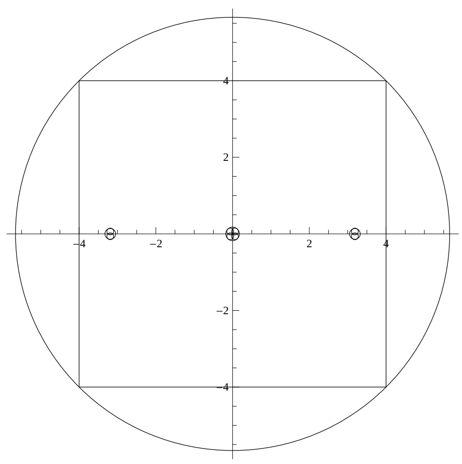


図 3　特異点の被覆円板

6　おわりに

本研究では，与えられた正方形領域上の複素関数の特異点を自動検出し，その留数を精度保証付きで計算するプログラムを作成した．

特異点の自動検出については，加藤 [1] アルゴリズムの改良版を用いた．そして，検出された特異点に対し柴田 [2] の留数の精度保証付き計算法を用いた．

全ての孤立特異点を完全に分離することは数値的には困難であるので，ここでは，いくつかの特異点を含むクラスターを分離している．従って，留数は，クラスター内の特異点の留数の総和として計算される．

7　参考文献

[1] 加藤里奈 : 複素円板法による初等関数の正則性判定システムの構築，南山大学情報理工学部卒業論文 (2015).

[2] 柴田栞里 : 複素円板法による初等関数の正則性判定システムとその応用，南山大学情報理工学部卒業論文 (2016).