ピカール反復法による常微分方程式の数値解法

2014SS074 澤田　耕輔

指導教員：杉浦洋

1　はじめに

ピカールの反復法は常微分方程式の理論において，初期値問題の解の存在を証明する際に用いられる重要な手段である．ピカールの反復法は常微分方程式の初期値問題と同値な積分方程式に基づき，単純反復により解関数に一様収束する関数列を構成する．

ピカールの反復法を数値的に近似計算することにより，常微分方程式の数値解法を構成することが本研究の目標である．反復法を途中で打ち切ることにより近似解関数が得られる．それにより，任意の点で解の近似値を計算することができる．特に解関数が正則関数なら複素平面上の任意の点で近似値を計算することができる．

基本となるのは，ピカールの関数列の項となる関数の離散化と積分方程式の近似である．ここでは，ピカールの関数列の各項をテイラー多項式で近似することにより離散化する．また，被積分関数を数値テイラー展開法により近似することにより，積分方程式を近似する．数値テイラー展開には離散型フーリエ変換を用いる．

2　ピカールの反復法

2.1　ピカールの反復法

未知関数 $y = y(x)$ に関する常微分方程式の初期値問題

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = b \tag{1}$$

の解に対する，ピカール反復法は

$$\begin{aligned} y_0(x) &= b, \\ u_n(x) &= f(x, y_n(x)), \\ y_{n+1}(x) &= b + \int_a^x u_n(t)dt \quad (n \geq 0), \\ \lim_{n\to\infty} y_n(x) &= y(x) \end{aligned} \tag{2}$$

である．これを数値計算する際に問題となるのは，$y_n(x)$ の離散化と式 (2) 右辺の積分である．

2.2　数値テイラー展開法

数値テイラー展開法は，点 a の周りで正則な関数 $f(z)$ のテイラー多項式を求める方法である．複素平面上に点 $a \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 R の円 $C : |z - a| = R$ を考える．C を含む単連結領域 D で正則な関数 $f(z)$ は

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \\ c_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} dz \end{aligned} \tag{3}$$

とテイラー展開される．

右辺の積分を等間隔標本点による台形則で近似すると，

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k &= \frac{1}{mR^k} \sum_{l=0}^{m-1} f(\xi_l) e^{-ik\theta_l} \cong c_k \ (0 \leq k < m), \\ \xi_l &= a + Re^{i\theta_l} (0 \leq l < m), \\ \theta_l &= \frac{2\pi l}{n} (0 \leq l < m) \end{aligned} \tag{4}$$

を得る．これを用いて，$f(z)$ の近似テイラー多項式

$$\tilde{f}_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{c}_k (z-a)^k \cong f(z) \tag{5}$$

を構成する．

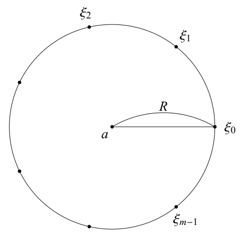

図 1　円 C 上の標本点 ξ_l の配置

3　数値ピカール反復法

数値テイラー展開法を，式 (2) の u_n に適用して，

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} d_{n,k} (x-a)^k \cong f(x, \tilde{y}_n(x)), \\ d_{n,k} &= \frac{1}{mR^k} \sum_{l=0}^{m-1} f(\xi_l, \tilde{y}_n(\xi_l)) e^{-ik\theta_l} \\ &(0 \leq k < m) \end{aligned}$$

を構成する．このためには，点 $a \in \mathbb{C}$ を中心とする適当な半径 R の円 $C : |z - a| = R$ を含む単連結領域 D で，$f(x, \tilde{y}_n(x))$ が正則である必要がある．実用上現れる多くの問題で，この条件は満足される．

ピカールの反復法 (2) の $u_n(x)$ を $\tilde{u}_n(x)$ で置き換えたものが数値ピカール反復法である．得られる近似解 $\tilde{y}_n(x)$ は $y(x)$ の複素円板 $|x - c| \leq R$ 上の近似となる．

3.1　第 1 種の公式

ピカールの反復法を次のようにして実現する．$N > 0$ を固定する．解 $y(x)$ の逐次近似列

$$\begin{aligned} \tilde{y}_0(x) &= b, \\ \tilde{y}_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} (x-a)^k \ (1 \leq n \leq N) \end{aligned} \tag{6}$$

を構成し，$\tilde{y}_N(x)$ を近似式として採用する．補助関数

$$\tilde{u}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} d_{n,k}(x-a)^k \cong f(x, y_n(x)) \quad (0 \le n < N) \tag{7}$$

を数値テイラー展開で求め，$\tilde{y}_{n+1}(x)$ の係数は

$$\begin{aligned} c_{n+1,0} &= b, \\ c_{n+1,k} &= \frac{d_{n,k-1}}{k} \ (1 \le k \le n+1) \end{aligned} \tag{8}$$

で計算する．

この計算を $n = 0, 1, \cdots, N-1$ で行い，最終結果 $\tilde{y}_N(x)$ を近似解として採用する．

3.2　第 2 種の公式

解 $y(x)$ の点 $x = a$ を中心としたテイラー展開の 1 次係数 $c_1 = y'(a) = f(a, b)$ であるから，数値テイラー展開で計算する必要はない．そこで，補助関数

$$v_n(x) = f(x, y_n(x)) - c_1 \tag{9}$$

により，ピカール反復の式を

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= b + \int_a^x f(x, y_n(x))dx \\ &= b + c_1(x-a) + \int_a^x v_n(x)dx \end{aligned} \tag{10}$$

を計算し，$y_N(x)$ を近似解として採用する．

$$\tilde{v}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} d_{n,k}(x-a)^k \tag{11}$$

の係数は数値テイラー展開により

$$d_{n,k} = \frac{1}{nR^k} \sum_{=0}^{n-1} \{f(\xi_l, \tilde{y}_n(\xi_l)) - c_1\} e^{-ik\theta_l} \ (1 \le k \le n) \tag{12}$$

で計算する．ここで，

$$\theta_l = \frac{2\pi}{n} l, \xi_l = a + Re^{i\theta_l} \ (0 \le l < n) \tag{13}$$

である．

これより，$\tilde{y}_{n+1}(x)$ の係数は

$$\begin{aligned} c_{n+1,0} &= b, c_{n+1,1} = c_1, \\ c_{n+1,k} &= \frac{d_{n,k-1}}{k} \ (2 \le k \le n+1) \end{aligned} \tag{14}$$

で計算できる．

第 1 種と比べると，$\tilde{y}_N(x)$ の 1 次係数が正確に $y(x)$ の 1 次係数 $y'(a) = f(a, b)$ と一致する点が優れている．

また式 (11) の数値テイラー展開の標本点数が n 点であり，対応する第 1 種の数値テイラー展開 (7) の $n+1$ 点より 1 点少ない．また反復は $n = 1$ から始まるので，$n = 0$ から始まる第 1 種より 1 回少ない．

以上により，同じ次数の近似 $\tilde{y}_N(x)$ が少ない計算量で，正確に求められることが期待できる．

3.3　第 3 種の公式（陰的公式）

ピカールの反復法は，常微分方程式の初期値問題（1）と等価な積分方程式

$$y(x) = b + \int_a^x f(x, y(x))dx \tag{15}$$

を逐次反復法で解く方法である．

第 2 種公式では，$\tilde{y}_N(x)$ の計算が終わったところで計算を停止したが，数値テイラー展開の標本点数を $n = N-1$ に固定したまま，数値ピカール反復法を行う．すなわち，

$$\begin{aligned} d_{N-1,k} &= \frac{1}{(N-1)R^k} \sum_{l=0}^{N-2} \{f(\xi_l, \tilde{y}_N(\xi_l)) - c_1\} e^{-ik\theta_l}, \\ &\quad (2 \le k \le N-1) \\ c_{N,0} &= b, \\ c_{N,1} &= f(a, b), \\ c_{N,k} &= \frac{d_{N-1,k-1}}{k} \ (2 \le k \le N) \end{aligned} \tag{16}$$

この計算を係数 $\{c_{N,k}\}_{k=0}^{N}$ が一定値に収束するまで繰り返す．これは積分方程式を数値的に解くことに相当する．

4　終わりに

常微分方程式の理論において，重要なピカールの反復法を数値解法として用いることを目指した．3 種類の数値解法を考案し，プログラムを作成してその有効性を検証した．

第 1 種は，数値テイラー展開法によりピカール反復の積分を計算し，解のテイラー多項式を求める方法である．第 2 種は，テイラー多項式の 1 次係数を微分方程式右辺で計算する方法である．第 1 種より計算量が少なく精度が高かった．第 3 種はテイラー多項式の次数を一定とし，テイラー多項式の係数が変化しなくなるまでピカール反復を繰り返す方法である．これは，ピカール反復公式を積分方程式とみなしてそれを数値的に解く方法である．残念ながら第 2 種とほとんど精度が変わらなかった．結局，最も優れているのは第 2 種であると判断した．

その次に，我々の第 2 種ピカールの反復法と古典的ルンゲ・クッタ法を比較した．計算コストを微分方程式の右辺関数の計算回数とし，両者の誤差とコストを比較した．低コストでは古典的ルンゲ・クッタ法の誤差が小さく効率が良かった．ピカールの反復法は，コストの増加に対する誤差の減少の割合が古典的ルンゲ・クッタ法より大きいことが分かった．したがって，高コストではピカール反復法の方が誤差が小さく効率が良かった．

5　参考文献

[1] 馬場敬之:常微分方程式キャンパス・ゼミ，マセマ出版社 (2014).

[2] 杉浦洋:数値計算の基礎と応用［新訂版］―数値解析学への入門―，サイエンス社 (2009).