

折り紙により形成される曲面の研究

2014SS070 尾関 勝史

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

子供の遊びとしての「折り紙」は色紙で奴さん・風船などを折るものがある。この研究では、それを一般化して、一枚の紙にいくつかの折れ目を付け、折ったりたわめたりしてできた作品、として「折り紙」を扱う。典型的には展開図から折られる商品の箱のような造形である。展開図の折れ目に曲線を使ったり、たわみを入れて折ることにより非常に多様な形状が得られる(図 1,2[1])。

折り紙は、折線(曲線)を境界とする滑らかにたわんだ曲面で構成される。紙は曲げられるが伸縮しない素材であるから、曲面は「可展面」と呼ばれる曲面族に制約される。可展面は Gauss 曲率が 0 の滑らかな曲面全体を含む集合である。折線は、2つの可展面の交線としての制約を受ける。さらに、折り紙は伸ばしたときに平面上の展開図と一致する必要がある。

これらの制約を数式として表現し、折り紙の数学的な設計法を明らかにするのが、本研究の目的である。

微分幾何は中間発表のときに扱った。今回は展開図上の曲線が折り上がりではどのような空間曲線になるのかについて述べる。

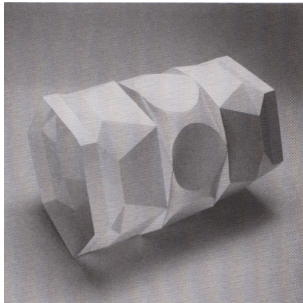


図 1 六角柱の彫刻



図 2 鱗の柱

2 今回扱う立体

図 3 で示すような展開図から図 4 のような立体ができる。これをコンピュータ上で再現する。

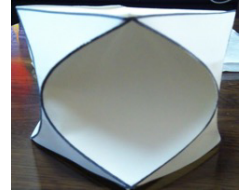
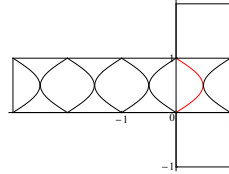


図 3 今回扱う立体の展開図 図 4 図 1 の展開図の立体

3 Orid 関数柱面構成

4.2 節で定義した三角屏風において、 d を求める関数 *Orid* を設計する。 xy 平面上の折り紙展開図の折線を実数 t をパラメタとして $\bar{f}(t)$ で表す。 $\dot{\bar{f}}(t) \neq 0$ とする。折線 $\bar{f}(t)$ を母線と見なし、その進行方向の右側に線維ベクトル $\bar{a} \in \mathbb{R}^2, \|\bar{a}\| = 1$, 左側に線維ベクトル $\bar{b} \in \mathbb{R}^2, \|\bar{b}\| = 1$ を配する。折り紙は母線 $\bar{f}(t)$ を堺に 2つの線識面

$$\bar{A} : \bar{f}(t) + u\bar{a}, \quad (1)$$

$$\bar{B} : \bar{f}(t) + u\bar{b} \quad (2)$$

に分かれる。ここで、 t, u は線識面のパラメタである。展開図を $\bar{f}(t)$ で折り曲げてできた折り紙が、あらかじめ定められた線維ベクトル $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3, \|\bar{a}\| = \|\bar{b}\|$ と未知関数 $f(t), \|\dot{f}(t)\| = \|\dot{\bar{f}}(t)\|$ を母線とする 2枚の線識面

$$A : f(t) + ua, \quad (3)$$

$$B : f(t) + ub \quad (4)$$

で構成されたとし、展開図との 1:1 対応を

$$\bar{f}(t) + u\bar{a} \leftrightarrow f(t) + ua, \quad (5)$$

$$\bar{f}(t) + u\bar{b} \leftrightarrow f(t) + ub \quad (6)$$

とする。展開図もそれを折った立体も非常に幅の狭い四角屏風を重ねた物と見なせる。すなわち各母線の近傍では、線分 $\bar{f}(t)\bar{f}(t+dt)$ を折線とし $\bar{f}(t) + \bar{b}, \bar{f}(t), \bar{f}(t) + \bar{a}, \bar{f}(t+dt) + \bar{b}, \bar{f}(t+dt), \bar{f}(t+dt) + \bar{a}$ を輪郭点とする展開図上の四角屏風と、線分 $f(t)f(t+dt)$ を折線とし $f(t)+b, f(t), f(t)+a, f(t+dt)+b, f(t+dt), f(t+dt)+a$ を輪郭点とする折り紙上の四角屏風が対応する。ここで、 dt は正の微小変位である。これを *Orid* 関数で表現すると、

$$\bar{d} = \frac{\bar{f}(t+dt) - \bar{f}(t)}{\|\bar{f}(t+dt) - \bar{f}(t)\|}, \quad d = \frac{f(t+dt) - f(t)}{\|f(t+dt) - f(t)\|} \quad (7)$$

として,

$$d = \text{Orid}(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{d}}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, y) \quad (8)$$

$$y = \begin{cases} 1 & (\text{山折り}), \\ 0 & (\text{谷折り}) \end{cases} \quad (9)$$

である. dt は正の微小変位であり, $\|\dot{\mathbf{f}}(t)\| = \|\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)\|$ を仮定したので,

$$\bar{\mathbf{d}} = \frac{\bar{\mathbf{f}}(t+dt) - \bar{\mathbf{f}}(t)}{\|\bar{\mathbf{f}}(t+dt) - \bar{\mathbf{f}}(t)\|} = \frac{\bar{\mathbf{f}}(t+dt) - \bar{\mathbf{f}}(t)}{\|\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)dt\|} = \frac{\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)}{\|\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)\|}, \quad (10)$$

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{f}(t+dt) - \mathbf{f}(t)}{\|\mathbf{f}(t+dt) - \mathbf{f}(t)\|} = \frac{\mathbf{f}(t+dt) - \mathbf{f}(t)}{\|\dot{\mathbf{f}}(t)dt\|} = \frac{\dot{\mathbf{f}}(t)}{\|\dot{\mathbf{f}}(t)\|} \quad (11)$$

である. これを式 8 に代入して

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = \|\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)\| \text{Orid}\left(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \frac{\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)}{\|\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)\|}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, y\right) \quad (12)$$

を得る. これを積分して,

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{p} + \int_0^t \|\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)\| \text{Orid}\left(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \frac{\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)}{\|\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)\|}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, y\right) dt \quad (13)$$

である. 初期点 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ は任意に取れる.

4 Orid 関数錐面構成

錐面は柱面と違い $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ は固定されない. まず展開図の線織面 $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$ 上にそれぞれ点 $\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}$, 曲線 $\bar{\mathbf{f}}(t)$ をとり,

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \frac{\bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{f}}(t)}{\|\bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{f}}(t)\|}, \quad \bar{\mathbf{b}}(t) = \frac{\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{f}}(t)}{\|\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{f}}(t)\|} \quad (14)$$

とする. これで母線 $\bar{\mathbf{f}}(t)$ の左右に $\bar{\mathbf{a}}(t), \bar{\mathbf{b}}(t)$ を線織ベクトルとする錐面が形成される. 次に折り紙の折れ線を $\mathbf{f}(t)$ としそれを母線とし $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)$ を線織ベクトルとする錐面を \mathbf{A}, \mathbf{B} とする. そして, 点 $\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}$, 曲線 $\bar{\mathbf{f}}(0)$ をそれぞれ点 \mathbf{P}, \mathbf{Q} , 曲線 $\mathbf{f}(0)$ に対応させる. 折り紙は伸び縮みしないので,

$$\mathbf{a}(0) = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{f}(0)}{\|\mathbf{P} - \mathbf{f}(0)\|}, \quad \mathbf{b}(0) = \frac{\mathbf{Q} - \mathbf{f}(0)}{\|\mathbf{Q} - \mathbf{f}(0)\|} \quad (15)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{f}(0) + \|\bar{\mathbf{f}}(0) - \bar{\mathbf{a}}(0)\| \mathbf{a}(0), \quad (16)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{f}(0) + \|\bar{\mathbf{f}}(0) - \bar{\mathbf{b}}(0)\| \mathbf{b}(0) \quad (17)$$

これを Orid 関数で表現すると,

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = \|\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)\| \text{Orid}\left(\bar{\mathbf{a}}(t), \bar{\mathbf{b}}(t), \frac{\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)}{\|\dot{\bar{\mathbf{f}}}(t)\|}, \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), y\right) \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \frac{\bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{f}}(t)}{\|\bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{f}}(t)\|}, \quad \bar{\mathbf{b}}(t) = \frac{\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{f}}(t)}{\|\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{f}}(t)\|} \quad (19)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{f}(t)}{\|\mathbf{P} - \mathbf{f}(t)\|}, \quad \mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{Q} - \mathbf{f}(t)}{\|\mathbf{Q} - \mathbf{f}(t)\|} \quad (20)$$

となる. $\mathbf{f}(0)$ は与えられているので, これは常微分方程式の初期値問題である. これを解いて空間曲線 $\mathbf{f}(t)$ を求める.

5 Mathematica での表現

図 1 は sine 曲線で構成されている. 赤い曲線は $\bar{\mathbf{f}}(t) = (r \sin \pi t, t)$ ($0 \leq t \leq 1$) (ただし $r > 0$) である. $\bar{\mathbf{a}} = (1, 0)$, $\bar{\mathbf{b}} = (-1, 0)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ とした. Mathematica で微分方程式を解いた結果を次に示す.

$$\mathbf{f}(t) = \left(r \sin(\pi t), (1 - \sqrt{2})r \sin \pi t, D \right) \quad (21)$$

$$D = \frac{\sqrt{\pi^2 (2\sqrt{2} - 3) r^2 + 1} E\left(\pi t \left| 1 - \frac{1}{\pi^2 (2\sqrt{2} - 3) r^2 + 1} \right.\right)}{\pi} \quad (22)$$

ここで E は楕円積分

$$E(\phi|m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} d\theta \quad (23)$$

である. これを使って Mathematica で設計すると図 4 になる.



図 5 実際の立体

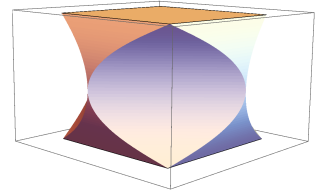


図 6 Mathematica での表現

6 おわりに

本研究では, 微分幾何の問題から展開図に滑らかな曲線で折線を描いたとき, それを指定された折り方 (柱面折り・錘面折り, 山折り・谷折り) をしたとき, 3次元空間に現れる曲線を計算する方法を考案した.

この方法は様々な展開図を折り上げたときにできた作品を, 予めコンピュータのディスプレイ上で見ることを可能とする.

今後の課題は様々な立体作品を制作し, Mathematica で計算し, 再現していく. またその経験に基づいて折り紙設計支援ツールを作成することも意義深い.

7 参考文献

- [1] 三谷 純: 『立体折り紙アート』. 日本評論社, 東京, 2015.
- [2] 梅原 雅顕, 山田 光太郎: 『曲線と曲面 微分幾何的アプローチ 改訂版』. 裳華房, 東京, 2015.
- [3] 小林 昭七: 『曲線と曲面の微分幾何 改訂版』. 裳華房, 東京, 2002.