

凹面鏡による 3 次元アナモルフォーシス

2014SS007 朝倉 涼太

指導教員：杉浦 洋

1 はじめに

平面鏡で物を映す場合には、左右は逆になるが見たままに像が映る。しかし、円筒鏡や球面鏡のように鏡が曲がっていたり、特殊な形をしていたりする場合には、像の見え方は実物とは大きく異なる。また、見る角度によっても歪み方や映り方が変わってくる。歪んだ画像や絵を円筒や球面に投影したり、角度を変えてみることで正常な形が見えるようになるデザイン技法があり、この技法のことをアナモルフォーシスと呼んでいる。アナモルフォーシスのほかにアナモルフォーズ、ゆがみ絵など様々な呼ばれ方がある。ここでは、すべてアナモルフォーシスに統一する。昨年度は凸球面鏡によって歪んだ立体模型をきれいに映し出す研究であったが、今年度は凹球面鏡によって歪んだ立体模型をきれいに映し出す研究を行う。

2 凹球面鏡による反射の計算

今、目の前に球面鏡があり、風景が歪んで写し出されているとする。目と球面鏡の間に、窓があるとする。球面鏡に反射して窓ガラスの上の点 q を通って目に入る光は、どこからきたのかを調べる。視点を $e = (e_1, 0, e_3)$ 、窓ガラスの中心を $c = (c_1, 0, c_3)$ とする。球面鏡の面の方程式を

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2, \quad (1)$$

球の中心を $o = (0, 0, R)$ とする。 c を見る視線 $c - e = (c_1 - e_1, 0, c_3 - e_3)$ は、窓ガラスと直交している。窓ガラス上の水平方向の単位ベクトルを u 、垂直方向の単位ベクトルを v とする。 u, v は窓の座標ベクトルであり、 $c - e, u, v$ は互いに直交である。

u, v は単位ベクトルであるから、 $\|u\| = \|v\| = 1$ となる。 $\|u\| = 1$ を満たすためには、 $u = (0, 1, 0)$ とすれば良い。 $\|v\| = 1$ を満たすために、 $v' = (c_3 - e_3, 0, e_1 - c_1)$ を考えると、これは $c - e$ と u と直交しているので、 v' を正規化して、

$$v = \frac{v'}{\|v'\|}$$

とすれば良い。このようにすることで、窓ガラスの上の点 q は、

$$q = c + su + tv$$

と書ける。

次に、視点 e からの視線が、窓の中の点 q を通り、点 r で球面鏡に反射して、床の上の点 p に到達するとする。このとき、床は xy 平面である。

まず $r = (r_1, r_2, r_3)$ を求める方程式を作る。点 r を通る視線ベクトルは、

$$d = q - e$$

となり、点 r を通る視線は、

$$L: x = e + td \quad (t \geq 0) \quad (2)$$

となる。点 r の方程式は、

$$r = e + td \quad (r \text{ は } L \text{ 上にある}), \quad (3)$$

$$r_1^2 + r_2^2 + (r_3 - R)^2 = R^2 \quad (r \text{ は球面上にある}) \quad (4)$$

となるので、(4.3), (4.4) を Mathematica に解かせる。解 r は 2 点出すが、 t が大きい (奥の) 点を選ぶ。

次に、点 r で反射した視線ベクトルを求める。点 q における球の外向き単位法線を n とすると、

$$n = \frac{1}{R}(r - o)$$

である。反射の法則により、視線ベクトル d の反射ベクトル g は、

$$g = d - 2(n \cdot d)n$$

である。

これを正規化したもので置き換えて、

$$g \leftarrow \frac{g}{\|g\|}$$

とする。反射した視線は、

$$L': x' = r + tg \quad (t \geq 0)$$

となる。この t を反射距離という。

L' が物体とぶつかる点が p である。この点 p から出た光が点 r で反射し、点 q で窓ガラスを抜けて目に入ったということが分かる。島田 [3] では、 t は任意パラメータであったが、ここでは幾何学的における凹面鏡の原像と像の関係を用いて決定する。

凹面鏡の法則は球面鏡の中心近くに反射した光に対してよい近似を与える。反射点 r を鏡面の中心としてこの近似を用いる。

p と反射点の距離を l_p 、 q から内向き法線 N におろした垂線の足を q' 、 p から N におろした垂線の足を p' 、球面鏡は焦点距離 $f = \frac{R}{2}$ の凹面鏡で近似され、焦点を f とすると、

$$l_p = \frac{\|q - r\|}{\|q' - f\|} f$$

と表せる。ゆえに q に結ぶ原像 p は、

$$p = r + l_p g \quad (p \text{ は } L' \text{ 上にある}) \quad (5)$$

である。すなわち、

$$p = r + \frac{\|q - r\|}{\|q' - f\|} fg \quad (6)$$

となる。

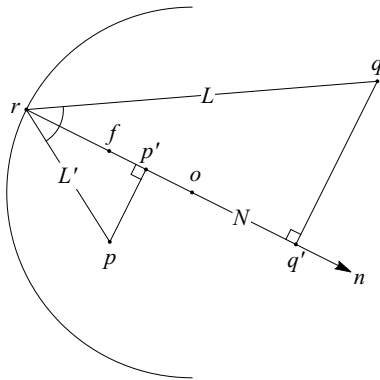


図 1

3 3D プリンターのプリントデータ作製

1. Mathematica で鏡の内部に見たい像を，3次元図形として作製する。
2. Export 関数で stl データに変換し，stl ファイルとしてセーブする．stl データは，3次元図形を三角形の面からなる多面体として表現する。
3. Import 関数で stl ファイルを読み込み，GraphicsComplex 形式の 3次元図データに変換する．これは，stl データと等価で頂点座標と三角面の頂点番号から成る。
4. 頂点座標のデータを鏡像変換する．変換された座標点は，鏡に映されたときに元の座標点に存在するかのように見える。
5. 変換後の座標データと元の面データを統合して，新しい 3次元図形データを作製する．この図形は，鏡に映されたときに鏡の中の見たい像と重なる。
6. 変換後のデータを Export 関数で stl データに変換し，stl ファイルとしてセーブする。

4 作品紹介

4.1 ドラえもん

1. ドラえもんの 3次元データを用意する．今回はドラえもんの stl データをインターネットの無料配布サイトから頂いた [2]．
2. これが実際に 3D プリンターで作製した作品である (図 2)．
この作品を凹球面鏡に対して所定位置に配置し，定められた視点から眺めると，凹球面鏡には正常なドラえもんが映し出される (図 3)．

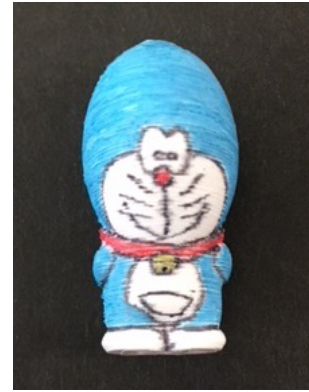


図 2



図 3

5 おわりに

本論文では，アナモルフォーシスの歴史を調べ，斜面投影方式，鏡面投影方式という二つの方式についてそれぞれ応用芸術として楽しまれてきたことを知った。

本研究では，3D プリンターにより凹球面鏡アナモルフォーシス作品を造形することを目指し，凹球面鏡の反射について幾何光学的に考察した．島田 [3] は反射方向のみを調べたが，凸面鏡の反射の法則により，原像の距離を確定する方法を考案した．凹面鏡を正面から見たとき，中心にドラえもんが映るように原像から像への写像を具体的に構成した．そして，予定した鏡像が得られる原像を設計し，それを 3D プリンターで造形した．作品は予定した鏡像の大きく変形したコピーになっているが，実際に凹球面鏡と作品を所定の位置に配置し，所定の位置から眺めると，ドラえもんがきちんと写しだされて驚きを感じた。

6 参考文献

- [1] 『鏡に別の絵が映ってる！不思議な「アナモルフォーズ（歪像画）」いろいろ』：<http://www.geocities.jp/sakushiart/ana1.htm>
- [2] 杉原厚吉：『立体イリュージョンの数理』，共立出版（2006）
- [3] 島田 愛淑『3次元アナモルフォーシス』 南山大学数理情報システム数理学科 杉浦研究室 2016 年度卒業論文集