

論理パズルの解法の比較

2014SS100 座間智貴

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

私は3年次に「システム数理演習Ⅱ」で学んだ真理値表の論理パズルへの応用に興味を持った。論理パズルのような複雑な問題を真理値表を用いて容易に解を求めることができることを学んだからである。

本研究の目的は、[1]、[4]にある論理パズル問題を複数の方法で解き、それらを比較することである。用いた解法は、場合分け、式変形、真理値表、体系 LKP の4つであり、比較の視点は、解法の難易度、解答の長さ、論理の正確さ、汎用性である。

本稿では4節で、[4]の「グリーン家盗難事件」という論理パズル問題に対して、真理値表と体系 LKP を用いた解法を紹介し、5節で、本研究を通して解いた問題を4つの視点でまとめる。また、2節では真理値表と論理記号を導入し、3節では体系 LKP を導入する。

2 論理記号と真理値表

この節では真理値表を用いて問題を解くにあたって、必要となる論理記号を定め、真理値表を導入する。

本稿で用いる論理記号は、「 \sim でない」を表す \neg 、「ならば」を表す \supset の2つである。また、真理値 T は真であることを意味し、真理値 F は偽であることを意味する。

2つの命題 P, Q に対し、 $\neg P, P \supset Q$ の真理値は、 P, Q の真理値に応じて以下の表1と表2の通りに定める。

表1 \neg の真理値表

P	$\neg P$
T	F
F	T

表2 \supset の真理値表

P	Q	$P \supset Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

上の表のように、真理値を対応づける表を真理値表という。

3 シークエント体系 LKP の導入

本節では論理パズルの問題を解くための1つの手段として佐々木 [3] より、シークエント体系 LKP を導入する。この体系 LKP はシークエントの変化で証明を表現するしくみである。シークエントとは、「使える性質の列 $\langle P_1, \dots, P_n \rangle$ と導きたい性質 P とのペア」を意図した形式表現

$$\langle P_1, \dots, P_n \rangle \rightarrow P$$

のことである。「シークエント S_1, \dots, S_n から、シークエント S が導かれる」という変化を

$$\frac{S_1 \quad \dots \quad S_n}{S}$$

と表現し、これを推論規則という。各 S_i を各推論規則の上式、 S を下式という。

証明の表現は、

(I) 明らかに正しくかつ基本的なシークエント

(II) 明らかに正しくかつ基本的な推論規則

を選び、(I) として選ばれたシークエントから、(II) として選ばれた推論規則を適用することで行う。「基本的」とは、それらから、正しいシークエントと正しい推論規則を表現でき、かつ、互いに独立ということである。ここで選ぶ (I) と (II) は、それぞれ次の LKP 公理と LKP 推論規則である。

定義 3.1 LKP 公理と本稿で用いる LKP 推論規則を以下に定める。

LKP 公理

$$P \rightarrow P$$

LKP 推論規則

$$\frac{\Gamma, \Sigma \rightarrow P \quad \Gamma, Q, \Sigma \rightarrow R}{\Gamma, P \supset Q, \Sigma \rightarrow R} \text{ (}\supset\text{左)} \quad \frac{P, \Gamma \rightarrow Q}{\Gamma \rightarrow P \supset Q} \text{ (}\supset\text{右)}$$

$$\frac{\Gamma, \Sigma \rightarrow P}{\Gamma, \neg P, \Sigma \rightarrow \perp} \text{ (}\neg\text{左)}$$

$$\frac{P, \Gamma \rightarrow \perp}{\Gamma \rightarrow \neg P} \text{ (}\neg\text{右)}$$

$$\frac{\Gamma, \Sigma \rightarrow Q}{\Gamma, P, \Sigma \rightarrow Q} \text{ (}w\text{左)}$$

シークエント S の LKP 証明図は、LKP 公理と LKP 推論規則を用いてふつうの方法で定義する ([3])。直観的には LKP 推論規則を積み上げて、どの枝も LKP 公理に達している図である (4節の図参照)。シークエント S の LKP 証明図が存在するとき、 S は体系 LKP で証明可能であるという。シークエント $\rightarrow P$ が体系 LKP で証明可能であることと、 P の真理値が常に T であることは同値であることがわかっている ([3])。

4 グリーン家盗難事件

この節では [4] の「グリーン家盗難事件」という問題の解を、真理値表と体系 LKP を用いて求める。

問題: エメラルドの宝石が盗まれた知らせをうけて、グリーン家に急行した名探偵のファニーは、そこで執事の証言を得ました。

執事: 「私が目撃者なら、メイドのミミが犯人」であるなら、メイドのミミは犯人ではありません。

窓辺で腕ぐみをしてしばらく外を眺めたあと、ファニーはこう結論をくだしました。

ファニー: 「執事は“メイドのミミは犯人ではない”と言ってるんだわ！」

ファニーの論理は正しい？

[記号化] P, Q を用いて以下のように記号化する．

P : 執事が目撃者である

Q : ミミが犯人である

すると、問題は

$$((P \supset Q) \supset \neg Q) \supset \neg Q$$

が常に正しいか (体系 LKP で証明可能か) を調べればよい．

[解法 1] 真理値表

この問題についての真理値表を表 3 に示す．

表 3 「グリーン家盗難事件」の真理値表

P	Q	$((P \supset Q) \supset \neg Q) \supset \neg Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

表 3 より、論理式 $((P \supset Q) \supset \neg Q) \supset \neg Q$ の常に T となるので、ファニーの論理は正しいと言える．

[解法 2] 体系 LKP

論理式 $((P \supset Q) \supset \neg Q) \supset \neg Q$ が成り立つかどうかを LKP 証明図を書いて証明する (図 1 参照)．

$$\frac{\frac{Q \rightarrow Q}{P, Q \rightarrow Q} (w \text{ 左})}{Q \rightarrow P \supset Q} (\supset \text{ 右}) \quad \frac{Q \rightarrow Q}{Q, \neg Q \rightarrow \perp} (\neg \text{ 左})}{Q, (P \supset Q) \supset \neg Q \rightarrow \perp} (\supset \text{ 左})}{(P \supset Q) \supset \neg Q \rightarrow \neg Q} (\neg \text{ 右})}{\rightarrow ((P \supset Q) \supset \neg Q) \supset \neg Q} (\supset \text{ 右})$$

図 1 「グリーン家盗難事件」の LKP 証明図

図 1 の通り、目的のシーケントを終式とする LKP 証明図が書けたので、 $((P \supset Q) \supset \neg Q) \supset \neg Q$ は成り立つ．したがって、ファニーの論理は正しい．

5 解法比較のまとめ

本節では、卒業研究を通して解いた問題の解法を、解法の難易度、解答の長さ、論理の正確さ、汎用性の 4 つの視点でまとめる．比較する解法の種類は「場合分け」、「式変形」、「真理値表」、「体系 LKP」の 4 つとする．解法比較のまとめを表 4 に示す．

解法の難易度では、場合分けは問題の条件数に比例して、場合分けの数も増えるので難易度は \times とした．式変形は問題にもよるが、操作が総じて難しいと考え \times とし

た．真理値表は、真理値を比べるだけで、成り立つかどうかを判断できるので \square とした．体系 LKP は操作手順を失敗すると LKP 公理に到達できなくなってしまうのでとした．

解法の長さでは、場合分けは条件数に応じて場合分けの数も増え、解答も長くなるので \times とした．式変形は記号化した論理式によって、解答の長さが変わってくるので \square とした．真理値表はほとんどの問題が 1 つの表で解を求めることができたので \square とした．体系 LKP もほとんどの問題が 1 つの証明図で成り立つか確かめられるのでとした．

論理の正確さでは、場合分けは問題によって全てのパターンを網羅していないものもあるため \square とした．式変形は論理的に正しい式変形や考え方をしていけば、解答は論理的に正しくなるので \square とした．真理値表は論理式と真理値が正しければ、解答は論理的に正しくなるのでとした．体系 LKP は下式から上式への操作に矛盾がなければ論理的に正しくなるので \square とした．

汎用性では、卒業研究で解いた全 11 題のうち何題にその解法を使用したかを数え、その割合を算出した．それを表 5 にまとめた．表 5 において、真理値表が 100 % であることはそのよさを表していると言える．

表 5 より、使用頻度の割合が 1 番低い場合分けは \times 、その次に高い式変形と体系 LKP は \square 、全ての問題の解法として使用された真理値表を \square とした．

表 4 解法比較のまとめ

	解答の難易度	解答の長さ	論理の正確さ	汎用性
場合分け		\times		\times
式変形	\times			
真理値表				
体系 LKP				

表 5 各解法の汎用性

	使用した問題数 (回)	使用頻度 (%)
場合分け	2	18.1
式変形	4	36.3
真理値表	11	100.0
体系 LKP	7	63.6

参考文献

- [1] 小野田博一: 『超絶難問パズル』．講談社、東京、2013．
- [2] 佐々木克巳: 『2014 年情報数学講義資料』．南山大学、2014．
- [3] 佐々木克巳: 『2016 年数理論理学講義資料』．南山大学、2016．
- [4] 八杉満利子・林晋: 『論理パズルとパズルの論理』．遊星社、東京、1998．