# タブロー法の完全性

2014SS095 横山将大

指導教員：佐々木克巳

## 1 はじめに

タブロー法は, 述語論理の論理式が恒真であるかどうかを調べる機械的な手続きの 1 つである．本研究の目的は, [1] で紹介されているタブロー法の完全性の理解を [2] と比較しながら深めることである．具体的には [1] の記述を補いながら, その完全性, すなわち, 次の 2 つの定理

**定理 1.1(健全性)** タブロー法により証明可能な論理式は, すべて妥当な論理式である．

**定理 1.2(完全性)** 妥当な論理式はすべて, タブロー法により証明可能である．

の理解を深めた．本稿では, 上の健全性の証明を, [1] の記述を補った部分を中心に述べる．次の 2 節で論理式, 3 節でタブロー法による証明可能性, 4 節で論理式の妥当性を導入し, 5 節で健全性の証明を述べる．

## 2 論理式

この節では, [1] にしたがって, 論理式と符号付き論理式を定義する．まず, 論理式に用いる記号は 6 種類: (1) 論理結合子 $\neg$. $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, (2) カッコ (, ), (3) 量化子 $\forall$, $\exists$, (4) 個体変項 $x$, $y$, $x_1$, $x_2$, $\cdots$, (5) 個体パラメター $a$, $b$, $a_1$, $a_2$, $\cdots$, (6)($n$ 項) 述語記号 $\Phi$, $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\cdots$ である．

次に, 論理式は, この 6 種類を用いてふつうの方法で定義する．ただし, 個体変項は常に量化子との関連のもとで使われるが, 個体パラメターに量化は行なわれないとする．たとえば, 論理式 $A$ に対して, $t$ が個体変項ならば $(\forall t)A$ は論理式であるが, $s$ が個体パラメターならば $(\forall s)A$ は論理式ではない．符号付き論理式の定義は以下である．

**定義 2.3(符号付論理式)** 論理式 $A$ に対し, $\bot : A$ と $\top : A$ を符号付き論理式という．

また, 論理式 $A$ において個体変項 $t$ が, その個体変項を含む量化子 $\forall t$ または $\exists t$ のどの現れの作用範囲にも, またはその量化子の中にも入っていない場所に現れる場合, $t$ のその現れは **自由な現れ** という．個体変項の自由な現れを全く含まない論理式を **閉じた論理式** という．

## 3 タブロー法による証明可能性

この節では, [1] にしたがってタブローを導入し, タブロー法による証明可能性を定義する．そのためにまず, 論理式を次の 4 つのタイプに分類する．

- **直接帰結タイプ** $\alpha$　$\bot : \neg A, \bot : A \rightarrow B$ など
- **枝分かれタイプ** $\beta$　$\bot : A \wedge B, \top : A \vee B$ など
- **普遍タイプ** $\gamma$　$\top : (\forall t)A, \bot : (\exists t)A$
- **存在タイプ** $\delta$　$\top : (\exists t)A, \bot : (\forall t)A$

それぞれのタイプの符号付き論理式 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に対し, 対応づけられる符号付き論理式 $\alpha_1$ と $\alpha_2$, $\beta_1$ と $\beta_2$, $\gamma(s)$, $\delta(s)$ を定義する．本稿では, その定義の一部を以下に示す．

| $\alpha$ | $\bot : \neg A$ | $\bot : A \rightarrow B$ |
|---|---|---|
| $\alpha_1$ | $\top : A$ | $\top : A$ |
| $\alpha_2$ | $\top : A$ | $\bot : B$ |

| $\beta$ | $\bot : A \wedge B$ | $\top : A \vee B$ |
|---|---|---|
| $\beta_1$ | $\bot : A$ | $\top : A$ |
| $\beta_2$ | $\bot : B$ | $\top : B$ |

| $\gamma$ | $\top : (\forall t)A$ |
|---|---|
| $\gamma(s)$ | $\top : A[t, s]$ |

| $\delta$ | $\top : (\exists t)A$ |
|---|---|
| $\delta(s)$ | $\top : A[t, s]$ |

ただし, $s$ は任意の個体パラメターで, $A[t, s]$ は, 論理式 $A$ の中の個体変項 $t$ のすべての自由な現れを個体パラメター $s$ に置き換えてできる論理式である．

以上の概念を用いて, タブローとタブロー法による証明可能性を次のように定義する．

**定義 3.1(タブロー)**

符号付き論理式 $X$ のタブローとは, $X$ から出発して, 次の 4 つの操作を任意の回数 (0 回を含む) 適用した枝分かれ図である．

($a$) 直接帰結タイプの論理式 $\alpha$ を含む枝の先に, $\alpha_1$ および $\alpha_2$ を付け加える．

($b$) 枝分かれタイプの論理式 $\beta$ を含む枝の先を, $\beta_1$ と $\beta_2$ に枝分かれさせる．

($c$) 普遍タイプの論理式 $\gamma$ を含む枝の先に, $\gamma(s)$ を付け加える．ただし, $s$ は任意の個体パラメターである．

($d$) 存在タイプの論理式 $\delta$ を含む枝の先に, $\delta(s)$ を付け加える．ただし, $s$ はその枝の中のいかなる論理式にも現れていない個体パラメターである．

以後, タブローの枝とその枝に属するすべての符号付き論理式の集合を同一視する．

**定義 3.2(閉じた枝と閉じたタブロー)** 論理式 $A$ について, $\top : A$ と $\bot : A$ をともに含むタブローの枝を閉じた枝といい, すべての枝が閉じた枝であるようなタブローを, 閉じたタブローという．

**定義 3.3(タブロー法による証明可能性)** 符号付き論理式 $\bot : A$ の閉じたタブローが存在するとき, $A$ はタブロー法により証明可能であるという．

## 4 論理式の妥当性

この節では, [1] にしたがって, 論理式の妥当性を定義する．そのために, 述語記号と個体パラメターに対する具体的解釈を与え, その解釈における論理式の真理値を定義する．

まず, 与えられた個体領域 $U$ における解釈とは, 述語記号に $U$ の具体的な述語を当てはめ, 個体パラメターに $U$

の具体的な個体の名前を当てはめることである.

次に, 対象式を定義し, これを用いて論理式の真理値を定義する.

**定義 4.1(対象式)** 論理式の中のすべての個体パラメターを個体そのものに置き換えた表現を対象式という. 対象式に対しても, 論理式と同様の概念や記号を用いる.

**定義 4.2(閉じた対象式の真理値)** 与えられた個体領域 $U$ とそこでの解釈 $I$ における, 閉じた対象式の真理値をふつうの方法で定義する. 本稿では, 次の 2 つの場合のみを具体的に示し, 他は省略する.

(1) $\Phi e_1 e_2 \cdots e_n$ が真 $\Leftrightarrow \langle e_1, e_2, \cdots, e_n \rangle \in I(\Phi)$

(2) $(\forall t)A$ が真 $\Leftrightarrow$ すべての $e \in U$ に対して, $A[t, e]$ が真.

**定義 4.3(閉じた論理式の真理値)** 個体パラメター $s_1, s_2, \cdots, s_n$ を含む閉じた論理式 $A$ の, 個体領域 $U$ とそこでの解釈 $I$ における真理値は, $A$ の中の $s_1, s_2, \cdots, s_n$ のすべての現れを, それぞれ $U$ に属する個体 $I(s_1)$, $I(s_2)$, $\cdots$, $I(s_n)$ に置き換えて得られる対象式の, $U$ とそこでの $I$ における真理値に一致する.

**定義 4.4(符号付論理式とその真理値)** 符号付き論理式の真理値を以下のように定める.

$A$ が真 $\Leftrightarrow \top : A$ が真 $\Leftrightarrow \bot : A$ が偽

上で導入した概念を用いて, 論理式の妥当性を定義する. 関連して, 目的の定理の証明に必要な充足可能性も定義する.

**定義 4.5(妥当性)** 閉じた論理式 $A$ が妥当であるとは, すべての個体領域でのすべての解釈において, $A$ が真となることである.

**定義 4.6(充足可能性)** 閉じた論理式 $A$ が充足可能であるとは, 少なくとも一つの個体領域での少なくとも一つの解釈において, $A$ が真となることである. また, 閉じた論理式の集合 $S$ が充足可能であるとは, 少なくとも一つの個体領域での少なくとも一つの解釈において, $S$ のすべての要素が同時に真となることである.

閉じた符号付き論理式とその集合に対しても, 同様に妥当性と充足可能性を定義する.

## 5 完全性の証明

この節では, 閉じた論理式に対象を絞り, 健全性を証明する. 以後, 閉じた論理式のことを単に論理式という. 健全性の証明は, 次の 2 つの補助定理を用いる. 1 つ目の補助定理の証明は省略する.

**補助定理 5.1** $S$ を符号付き論理式の集合とするとき,

(1) もし $S$ が充足可能であり, $\alpha \in S$ ならば, $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ は充足可能である.

(2) もし $S$ が充足可能であり, $\beta \in S$ ならば, $S \cup \{\beta_1\}$ と $S \cup \{\beta_2\}$ のうちの少なくとも一方は, 充足可能である.

(3) もし $S$ が充足可能であり, $\gamma \in S$ ならば, 任意の個体パラメター $s$ について, $S \cup \{\gamma(s)\}$ は充足可能である.

(4) もし $S$ が充足可能であり, $\delta \in S$ で, $s$ が, $S$ のいかなる要素にも現れない個体パラメターであるならば, $S \cup \{\delta(s)\}$ は充足可能である.

**補助定理 5.2** 符号付き論理式 $X$ が充足可能であれば, $X$ のタブローに少なくとも一本の充足可能な枝がある.

**証明** まず, 以下の $(*)$ を示す.

充足可能な枝が存在するタブローに対し, いかなる操作を適用しても, 少なくとも 1 本の枝は充足可能となる $\cdots (*)$

充足可能である符号付き論理式 $X$ のタブローを $T$ とし, $T$ に少なくとも一つの充足可能な枝 $\theta$ が存在すると仮定する. また, $\theta$ に属するすべての要素の集合を $S$, $T$ に操作 $(a), (b), (c), (d)$ を適用した枝を $\eta$ とし, 適用の結果としてタブロー $T'$ を得たとする.

(i)$\eta \neq \theta$ のとき, 適用された操作に関わらず, $T'$ に $\theta$ が含まれる.

(ii)$\eta = \theta$ のとき, 適用する操作により場合分けをする.

$(a)$ を適用したとき:補助定理 5.1(1) より, $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ は充足可能であるから, 新しい枝 $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ も充足可能である.

$(b)$ を適用したとき:補助定理 5.1(2) より, $S \cup \{\beta_1\}$ と $S \cup \{\beta_2\}$ の少なくとも一方は充足可能である. したがって, $\theta$ に $\beta_1$ を付け加えた枝と, $\theta$ に $\beta_2$ を付け加えた枝のうちの, 少なくとも一方は充足可能である.

操作 $(c)$ または操作 $(d)$ を適用したとき:補助定理 5.1(3), (4) より, (a) を適用したときと同様に, 新しい枝が充足可能とわかる.

(i), (ii) から, $(*)$ が成り立つ.

この $(*)$ を用いて, 数学的帰納法により次のように, この補助定理を示すことができる.

$T$ を得るのに適用した操作 $(a), (b), (c), (d)$ の回数を $N_T$ とおく.

(I)$N_T = 0$ のとき: 充足可能な符号付き論理式 $X$ のタブロー $T$ には, $X$ のみからなる充足可能な枝が存在する.

(II)$N_T > 0$ のとき: $N_T > 0$ より, $T$ は操作 $(a)$, $(b)$, $(c)$, $(d)$ を少なくとも一回適用され得られている. 最後の操作が適用される直前の $T$ を $T^*$ とすると, 帰納法の仮定により, $T^*$ の少なくとも一つの枝は, 充足可能な枝である.

よって $(*)$ から, $T$ の少なくとも一つの枝は充足可能となる. したがって, (I), (II) により, 補助定理 5.2 は示された.

**健全性の証明** 論理式 $A$ が証明可能, すなわち符号付き論理式 $\bot : A$ の閉じたタブロー $T$ を仮定すると, 補助定理 5.2 の対偶により, $T$ の出発点である符号付き論理式 $\bot : A$ は充足不可能となる. すなわち論理式 $A$ は妥当となる.

## 参考文献

[1] 丹治信春：『タブローの方法による論理学入門』. 朝倉書店, 東京, 2003.

[2] 森田茂行：『意味とモデルの理論 論理学』. 東京電機大学出版局, 東京, 1999.