論理パズルと決定不能性
—ゲーデルの不完全性定理—

2014SS033 川村宏彰

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

スマリヤン [1] は，ゲーデルの不完全性定理をもとに，理性的にものを考えられる推論者が，自分の整合性を確信しようとすると，その過程で不整合になってしまう決定不能性というものを述べている．

本研究の目的は，上の決定不能性をはじめとするいくつかの性質を，[1] による言葉での証明とは別に，図 (フローチャート) を用いる証明を考察し，内容の理解を深めることである．

この決定不能性は，[1] で，ゲーデルの第 2 不完全性定理に関係づけられているものと，第 1 不完全性定理に関係づけられているものの 2 種類があり，本稿では，本研究で扱った性質から，この 2 つに焦点を絞り，それぞれを 3 節と 4 節で扱う．2 節では，議論の舞台である推論者とシステムを定義する．

また本稿で用いる論理的記号∼，&，⊃，≡，⊥は，それぞれ，「ではない」，「かつ」，「もし・・・ならば」，「もし・・・ならば，そしてそのときにかぎり」，「論理的矛盾」を意味する．

2　議論の舞台

[1] では，2 つの舞台 (推論者とシステム) をもとに決定不能性について述べている．この節では，その舞台を説明する．

2.1　推論者の定義

第 1 の舞台は騎士と奇人の島である．

この島の規則は以下のとおりである．

島の規則

(a) この島の住人は，騎士か奇人のどちらかである．

(b) 騎士は本当のことしか言わない．

(c) 奇人は間違ったことしか言わない．

この島を舞台とし，島に訪れる推論者自身の推論能力を設定する．

任意の命題 p に関して，Bp を「推論者が p を信じている」という命題とする．推論能力が高くなるにつれて，1 型，2 型，3 型，4 型となり，それぞれの定義を以下に示す．

1 型の推論者

すべての恒真式を信じている，かつ，

もし p と $p \supset q$ を信じるならば q を信じる．

2 型の推論者

1 型で，$(Bp \ \& \ B(p \supset q)) \supset Bq$ を信じる．

3 型の推論者

2 型で，もし p を信じるならば Bp を信じる．

(また，「p を信じるならば Bp を信じること」を正常であるという．)

4 型の推論者

3 型で，$Bp \supset BBp$ を信じる．

2.2　システムの定義

この節では，[1] にしたがってシステムを導入する．

2.1 節で定義した推論者と彼の信念に関する結果のすべては，数理システムと，そこで証明可能な命題に関する数学的結果に対応するものである．クルト・ゲーデルが分析したある種のシステムは，次のような特徴をもつ．

(a) そのシステムで表現可能な命題がはっきりと定義された集合になること．それらはそのシステムで命題と呼ばれる．それらの命題の中には，⊥（論理的矛盾）があり，また p，q がそのシステムの命題とすると，命題 $(p \supset q)$ もそのシステムの命題である．

(b) そのシステム (それらを”S”と呼ぶ) は，そのシステムで特定の命題を証明可能にするさまざまな公理や推論規則をもつ．

(c) そのシステムの任意の命題 p に関して「p はそのシステムで証明可能である」という命題自体がそのシステムの命題である．

ここで Bp を p がそのシステムで証明可能であるという命題とする．つまり，推論者に関しての Bp は，その推論者が p を信じるということを意味し，数理システムに関しての Bp は，p がそのシステムで証明可能であることを意味する．よって，2.1 節における「推論者」を「システム」，「信じる」を「証明可能」に置き換えて考えることができる．

3　ゲーデルの第 2 不完全性定理

この節では，ゲーデルの第 2 不完全性定理について [1] が一般化したと述べているものを，フローチャートを用いて証明する．また，証明をする際，必要となってくる整合性と規則的の定義を与える．この節以降のフローチャートで用いる規則を，表 1 にまとめておく．表 1 における (1b)，(3)，(4) は，それぞれ 1 型，3 型，4 型の推論者を特徴づける性質の 1 つである．

【定義 3.1】

ある推論者が信じている (あるいは，これから信じるだろう) すべての命題の集合が⊥を含むならば不整合，⊥を含まないならば整合であるという (整合性)．

$p \supset q$ を信じるならば $Bp \supset Bq$ を信じる推論者を規則的とよぶ．これを満たすのは 3 型以上の推論者である．

整合性に関して，次の補助定理が成り立つ．

【補助定理】 ある命題 p とその否定 $\sim p$ を信じている推論者は不整合である．

以上をふまえて，決定不能性をもつ次の定理を証明する．

【定理 1】もし 4 型の整合な推論者が $p \equiv \sim Bp$ の形式のある命題を信じるならば，その推論者は自分が整合であることを知ることはできない．別の言い方をすれば，4 型の推論者は，$p \equiv \sim Bp$ を信じ，自分が整合であると信じるならば，彼は不整合になってしまう．

定理 1 を，より強い形で証明する．

【定理 1*】ある 1 型の正常な推論者が $p \equiv \sim Bp$ の形式のある命題を信じているとする．このとき

(a) もし彼が p を信じていれば，不整合になってしまう．

(b) もし彼が 4 型なら，「p を信じるとき，自分が不整合になってしまう」ことを信じている．

(c) もし彼が 4 型で，自分が不整合になりえないことを信じていれば，不整合になってしまう．

定理 1*の証明は図 1～図 3 のフローチャートで示す．

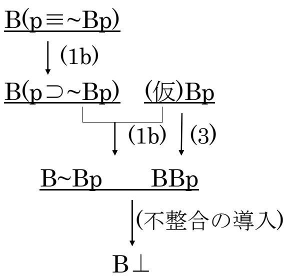

図 1 定理 1*(a) の証明図

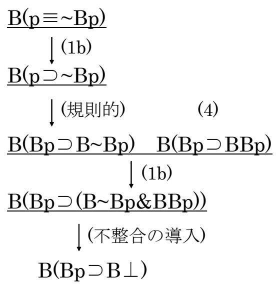

図 2 定理 1*(b) の証明図

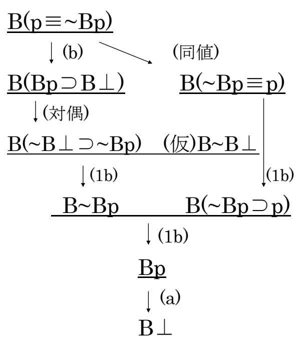

図 3 定理 1*(c) の証明図

また，命題 $p \equiv \sim Bp$ が証明可能であるような命題 p が存在するシステムを，ゲーデル的システムと呼ぶ．これを用い，定理 1 をシステムのことばで表すと，次のようになる．

【定理 2】もし 4 型のゲーデル的システムがその整合性を証明できるならば，そのシステムは不整合である．

[1] によれば，これは，ゲーデルの第 2 不完全性定理を一般化したものである．

4 ゲーデルの第 1 不完全性定理

この節では，ゲーデルの第 1 不完全性定理に関係させて [1] が示した決定不能性を，フローチャートを用いて証明する．この節では，システムのことばのみで考える．

【定義 4.1】

任意の命題 p について，Bp があるシステム S において証明可能であるならば，p も証明可能であるとき，そのシステムは安定であるという．また，安定でないシステム S を不安定という．

あるシステム S において，もし p がそのシステムで証明可能ではなく，かつ $\sim p$ も証明可能ではないような命題 p が少なくとも 1 つ存在するとき，そのシステムは不完全であるという．

【定理 3】任意の正常で安定で整合な 1 型のゲーデル的システムは不完全でなければならない．よりくわしくいうと，もし S が 1 型の正常なシステムで，p を $p \equiv \sim Bp$ が S で証明可能であるような命題であるとすると，

(a) もし S が整合であるならば，p は S で証明可能ではない．

(b) もし S が整合かつ安定であるならば，$\sim p$ も S で証明可能ではない．

定理 3 の証明は図 4～図 5 のフローチャートで示す．

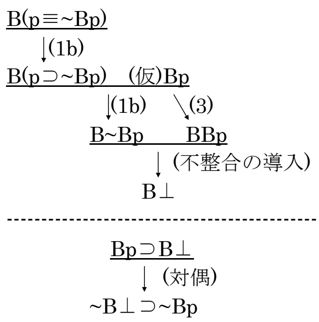

図 4 定理 3(a) の証明図

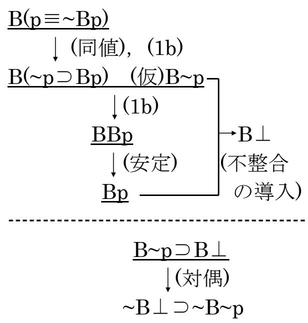

図 5 定理 3(b) の証明図

参考文献

[1] レイモンド・スマリヤン (田中朋之・長尾確 訳) :『スマリヤンの決定不能の論理パズル ゲーデルの定理と様相理論』．白揚社，東京，2008.

表 1 本稿の証明図で用いる規則

(1b)	$(Bp \ \& \ B(p \supset q)) \supset Bq$
(3)	$Bp \supset BBp$
(4)	$B(Bp \supset BBp)$
(不整合の導入)	$(Bp \ \& \ B{\sim}p) \supset B\perp$
(規則的)	$B(p \supset q) \supset B(Bp \supset Bq)$
(対偶)	$(p \supset q) \supset ({\sim}q \supset {\sim}p)$
(同値)	$(p \equiv q) \supset (q \equiv p)$ もしくは $(p \equiv q) \supset ({\sim}p \equiv {\sim}q)$
(仮)	仮定の命題
(安定)	$BBp \supset Bp$