「使える性質―導く性質」の表を用いた証明の書き方

2014SS004 新井 美智子
指導教員： 佐々木 克巳

1　はじめに

松井[1]では，「使える性質―導く性質」の表を用いて，証明の書き方を示している．本研究の目的は，その内容を補ったり，シークエント体系の推論規則に対応させたりして理解を深めることである．「使える性質―導く性質」の表もシークエントも，その変形によって，証明の道筋を表現できる．本研究では，まず，[1]で紹介されている「使える性質―導く性質」の表の変形のルール(以下ルール1という)と，[2]でシークエント体系の推論規則として紹介されている，シークエントの変化のルール(以下ルール2という)をまとめた．そして，[1]に載っている各問について，証明の道筋を作る過程を，ルール1，ルール2に基づいた形で示した．ここで，ルール1に基づく過程は[1]の記述を補う形で示した．結果として，証明の道筋を作る過程が，明確になり，その理解を深めることができた．[1]の記述を補った過程と，ルール2に基づく過程は，ほとんどの場合で同じになったが，背理法を用いる証明などで，ルール2に基づく過程の方が短く，コンパクトになるものもあった．これらの結果も，理解を深めることにつながった．

本稿では，次節で「使える性質―導く性質」の表を導入し，その変形によって，証明の道筋を立てられること，および，その変形のルール(ルール1)を示す．第3節，第4節では，本研究で扱った問のうちの2題について，[1]の記述と，それを補った記述を示す．

2　「使える性質―導く性質」の表

この節では，[1]に従って，「使える性質―導く性質」の表を導入し，その変形によって，証明の筋道を立てられること，および，その変形のルールを示す．

まず，「使える性質―導く性質」の表は，証明の各段階における，「使える性質」と「導く性質(導きたい性質)」を区別した，次の形の表である．

使える性質	導く性質
○○○ … □□□	△△△

具体的に，命題「実数a, bにおいて，$0 < a < b$ならば$a^2 < b^2$」の証明の最初の段階の表をかくと，以下のようになる．

使える性質	導く性質
a, bは実数 $0 < a < b$	$a^2 < b^2$

次に，証明の筋道は，この表の変形を繰り返すことで立てることができる．たとえば，上の表から推論を続け，表を変形すると，

使える性質	導く性質
a, bは実数 $0 < a$ $a < b$	$a^2 < b^2$

となる．使える性質の$a < b$と$0 < a$から導く性質の$a^2 < b^2$が得られるので，これで証明の筋道ができたことになる．

[1]における，「使える性質―導く性質」の表の変形のルールは以下の左の表から右の表への変形である．

(2.1) 使える性質に P∧Q があるとき

使える性質	導く性質
○○○ P∧Q	R

使える性質	導く性質
○○○ P Q	R

(2.2) 導く性質に P⇒Q があるとき 1

使える性質	導く性質
○○○	P⇒Q

使える性質	導く性質
○○○ P	Q

(2.3) 導く性質に P⇒Q があるとき 2

使える性質	導く性質
○○○	P⇒Q

使える性質	導く性質
○○○	¬Q⇒¬P

(2.4) 導く性質に¬P があるとき

使える性質	導く性質
○○○	¬P

使える性質	導く性質
○○○ P	矛盾

(2.5) 導く性質と使える性質(1 つ)を入れ替える

使える性質	導く性質
○○○ P	Q

使える性質	導く性質
○○○ ¬Q	¬P

(2.6) P⇒Q が既に認められ，使える性質に P があるとき

使える性質	導く性質
○○○ P	R

使える性質	導く性質
○○○ Q	R

3　具体例 1

この節では，次の命題の証明を考える．

命題　実数xにおいて，xが無理数ならば，$x + 1$は無理数である．

[1]で示された「使える性質―導く性質」の表の変化は次のとおりである．

使える性質	導く性質
x は実数	x は無理数 ⇒ $x + 1$ は無理数

使える性質	導く性質
x は実数	$x + 1$ は無理数でない ⇒ x は無理数でない

使える性質	導く性質
x は実数 $x + 1$ は無理数でない	x は無理数でない

[1]では上の変化を踏まえ，証明を次のように示している．

証明．xを実数とする．「$x + 1$は無理数でないとき，xが無

理数でない」を示す．xは実数より，$x+1$も実数である．これより$x+1$は無理数でない実数，すなわち有理数となる．ゆえ整数pと正整数qが存在して，$x+1=\frac{p}{q}$と書ける．これより$x=\frac{p}{q}-1=\frac{p-q}{q}$となる．$p$と$q$は整数より$p-q$も整数となり，$x$は有理数となる．ゆえに$x$は無理数でない．

本研究では，この変化を次のように補った．できる証明は[1]と同じになる．

使える性質	導く性質
x は実数	x は無理数 $\Rightarrow x+1$ は無理数

使える性質	導く性質
x は実数 x は無理数	$x+1$ は無理数

使える性質	導く性質
x は実数 $x+1$ は無理数でない	x は無理数でない

使える性質	導く性質
x は実数 $x+1$ は実数 $x+1$ は無理数でない	x は無理数でない

使える性質	導く性質
x は実数 $x+1$ は有理数	x は無理数でない

使える性質	導く性質
x は実数 p は整数 qは正整数 $x+1=\frac{p}{q}$	x は無理数でない

使える性質	導く性質
x は実数 p は整数 qは正整数 $x=\frac{(p-q)}{q}$	x は無理数でない

使える性質	導く性質
x は実数 p は整数 qは正整数 $x=\frac{(p-q)}{q}$ $p-q$ は整数	x は無理数でない

使える性質	導く性質
x は実数 x は有理数	x は無理数でない

使える性質	導く性質
x は実数 x は無理数でない	x は無理数でない

4　具体例 2

この節では，次の命題の証明を考える．

命題　実数a,bにおいて，$0<a<b$ならば$a^2<b^2$である．

[1]で示された「使える性質―導く性質」の表の変化は次のとおりである．

使える性質	導く性質
a,bは実数 $0<a<b$	$a^2<b^2$

使える性質	導く性質
a,bは実数 $0<a$ $a<b$	$a^2<b^2$

[1]では上の変化を踏まえ，証明を次のように示している．

証明．$0<a$より，$a<b$の両方にaを掛けると$a^2<ab$が得られる．$0<a<b$よりbは正であり，$a<b$の両辺にbを掛けると$ab<b^2$となる．上記より$a^2<b^2$が得られる．

本研究では，この変化を次のように補った．できる証明は[1]と同じになる．

使える性質	導く性質
a,bは実数	$0<a<b\Rightarrow a^2<b^2$

使える性質	導く性質
a,bは実数 $0<a<b$	$a^2<b^2$

使える性質	導く性質
a,bは実数 $0<a$ $a<b$	$a^2<b^2$

使える性質	導く性質
a,bは実数 $0<a$ $a<b$ $a^2<ab$	$a^2<b^2$

使える性質	導く性質
a,bは実数 $0<a$ $a<b$ $a^2<ab$ $0<b$	$a^2<b^2$

使える性質	導く性質
a,bは実数 $0<a$ $a<b$ $a^2<ab$ $ab<b^2$	$a^2<b^2$

使える性質	導く性質
a,bは実数 $0<a$ $a<b$ $a^2<b^2$	$a^2<b^2$

おわりに

本研究により苦手な証明が少しは得意になった．証明の道筋を作る過程を私なりに補うことにより，さらに理解を深められた．また，シークエント体系の推論規則を使うことにより，表がコンパクトになり，見やすくなる部分もあった．「使える性質―導く性質」の表，シークエント体系の推論規則にもとづく表はどちらにも利点・不利点があるため，場合に応じて使用したいと感じた．

参考文献

[1]　松井知己:『だれでも証明が書ける　眞理子先生の数学ブートキャンプ』．日本評論社，東京，2010.

[2]　佐々木克巳:『2016 年度数理論理学講義資料』．南山大学，2016.