

高等学校数学における数理計画問題

2014SS003 青山直樹

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

問題を解決するとき、解答を順序立てて構成することは、物事を論理的に考えること、および、解答をより深く理解することにつながる。そこで本研究では、高等学校数学の数理計画問題、とくに関数の最大最小問題に絞って、その多角的解法や特徴を調べることで、解答を順序立てて構成する手法を考察し、教育現場での多面的に考えさせる活動や、論理的な思考力を養わせる活動に役立てることを考える。

ここで対象とする関数の最大最小問題は高等学校における複数の分野で扱われていることから、複数の解法が存在し、本研究のテーマに適していると考えられる。

また、私は高等学校数学の教員を目指しているため、この研究成果を、数学の苦手な生徒や、より深く数学を学びたい生徒に対しての適切なアドバイスにつなげたいと考えている。

問題を順序立てて考えるために、本研究では、解法の方向性と技に注目し、方向性を判断する基準を定めた。そして、その基準で方向性を判断してうまくいっている例やそうでない例を挙げた。主に多変数関数で、かつ微分を利用しない問題を中心として扱った。

本稿では、以下の2節で、その方向性と技の詳細を述べ、3節で本研究で挙げた例のうち2つを示す。

2 解法の方向性と技

本研究では問題を順序立てて考えるために、解法の方向性と技に注目した。この節ではこれらの詳細を述べる。

まず、解法の方向性について述べる。注目した方向性は、「文字消去」、「平面図示」、「文字固定」の三つである。

「文字消去」は文字の種類を減らして、一変数の数理計画問題に帰着させようとする方向、「平面図示」は、条件と目的関数を図示することで、視覚的に値を推測する方向、「文字固定」は、一つの変数に注目し、それ以外の変数を固定することで、一変数とみなして問題を考える方向である。

三つの方向の選択は、問題文の条件の形で判断することを考える。すなわち、問題文の条件が「等式」、「従属不等式」、「独立不等式」のどの形になっているか、もしくは、「条件が明記されていないか」で判断する。具体的には、次の通りである。

「等式」の条件が含まれていた場合は、「文字消去」、「平面図示」の方向性が考えられる。「文字消去」は多変数関数の最も基本的な扱い方であるので、優先したい。

「従属不等式」、「独立不等式」の条件が含まれていた場合は、「平面図示」、「文字固定」の方向性が考えられる。基本的に「平面図示」がうまくいくことが多いので優先した

い。ただし、「平面図示」を選択するときは、条件と目的関数が容易に図示でき、視覚的に最大と最小の推測ができる必要がある。逆に言えば、条件と目的関数が図示できる形であったら、この方向性がうまくいく可能性が高い。また、この場合は「従属不等式」の条件が記されている場合が多い。「文字固定」の方向性を優先する問題は多くはないが、一変数として扱うことができ、汎用性があるので、重要な考え方である。この場合は「独立不等式」の条件が記されていることが多い。

問題文に条件が明記されていない場合は、基本的に(実数) $x^2 \geq 0$ の性質を利用するため、3つの方向性とは別に、目的関数の「平方完成」を行う。

次に、解法の技について述べる。技とは、問題を解くための具体的な操作のことであり、本研究では、「代入」、「対称式の利用」、「平方完成」、「逆手流」、「媒介変数表示」などのことを示す。ここで「対称式の利用」とは、 $x+y=u, xy=v$ とにおいて、与えられた条件式や目的関数を変形する操作であり、「媒介変数表示」とは、与えられた条件から適切なパラメータを選び、二つの変数を一つの変数だけで表現し、同様の変形をする操作である。「逆手流」とは、目的関数を k とにおいて、条件式の変数が実数である k の範囲を求める操作である。

表1に、この節で述べた方向性の基準をまとめておく。表1では、さらに、上の技が用いられるのはどの場合が多いのかについてもまとめておく。

表1 方向性と技の選択

条件	なし	等式	従属不等式	独立不等式
方向性	—	文字消去 (平面図示)	平面図示 (文字固定)	文字固定 (平面図示)
技	平方完成	代入 逆手流 媒介変数表示 対称式の利用	逆手流	一変数

3 方向性決定の実践

この節では、2つの問題に対し、2節で優先すると述べた方向性の解答と、そうでない解答の例を挙げ、両者を比較する。

問題1([1]) $x^2 + y^2 = 4$ のとき、 $4x + 2y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

与えられた条件は「等式」であるので、2節で述べたよう

に「文字消去」,「平面図示」の方向性が考えられ,前者が優先的に考える方向性である.

まず,それぞれの略解を以下に示す.

解答 1. 与式より, $y^2 = 4 - x^2$ である. ここで,「代入」を用いて,目的関数を変形させると,

$$4x + 2(4 - x^2) = -2(x - 1)^2 + 10$$

また, $y^2 = 4 - x^2 \geq 0$ より,

$$4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

よって, $x = 1$ のときに最大値, $x = -2$ のときに最小値をとる. また, $x = 1$ のとき $y = \sqrt{3}$, $x = -2$ のとき $y = 0$ である. したがって, $(x, y) = (1, \sqrt{3})$ のとき最大値 10 をとり, $(x, y) = (-2, 0)$ のとき最小値 -8 をとる. ■

解答 2. 目的関数 $= k$ とおくと,

$$4x + 2y^2 = k \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}k$$

この関数と条件式を平面に図示すると,条件式のグラフ(円)と目的関数のグラフ(右に凸の放物線)が接するとき k の値が最小,最大となるので,二つのグラフが接するときの k の値を求める.

k が最小のときは,接点が x 軸の負の部分に存在する場合であるので,

$$\frac{1}{4}k = -2 \Leftrightarrow k = -8$$

よって,最小値 -8 .

k が最大のときは,接点が y 軸よりも右側に存在する場合であるので,二つの関数を連立させて y を消去すると,

$$x^2 - 2x + \frac{1}{2}k = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + k - 8 = 0$$

この方程式の判別式が 0 になるときの k の値を求めればよい.判別式を D とすると,

$$D/4 = (-2)^2 - 2 \cdot (k - 8) = 4 - 2k + 16 = 0$$

よって, $k = 10$. したがって最大値 10. ■

解答 1 のように「文字消去」の方向性で解いてみると,うまく解答が進んでいくことがわかる.一方,解答 2 のように「平面図示」の方向性で解いてみると,条件のグラフは円であるが,目的関数のグラフは,右に凸の放物線であり,高等学校の数学では,扱われないグラフである.また,最大最小を求めるのにそれらが接する条件を求める必要がある.

問題 2([1]) $x + 2y \geq 4$, $x - 3y \geq -6$, $3x + y \leq 12$ のとき, $2x + y$ の最大値と最小値を求めよ.

与えられた条件は「従属不等式」であるので,2 節で述べたように「平面図示」,「文字固定」の方向性が考えられ,目的関数の形を考慮すると,前者が優先的に考える方向性である.

まず,それぞれの解答を以下に示す.

解答 1. 目的関数 $= k$ とおくと,

$$2x + y = k \Leftrightarrow y = -2x + k$$

この関数のグラフ(直線)と条件式を満たす領域(多角形)を平面に図示して求める値を推測する.

k は $(3, 3)$ を通るとき最大値 $2 \cdot 3 + 3 = 9$ をとり, $(0, 2)$ を通るとき最小値 $2 \cdot 0 + 2 = 2$ をとる. したがって, $(x, y) = (3, 3)$ のとき最大値 9 をとり, $(x, y) = (0, 2)$ のとき最小値 2 をとる. ■

解答 2. $2x + y$ について,まず y を固定して x だけを変数とみなして考える.定義域は,

$$0 \leq y \leq 2 \text{ のとき, } -2y + 4 \leq x \leq -\frac{1}{3}y + 4$$

$$2 \leq y \leq 3 \text{ のとき, } 3y + 6 \leq x \leq -\frac{1}{3}y + 4$$

また, $2x + y$ は x が最大のとき最大値,最小のとき最小値をとる.

最大値について,定義域より, $x = -\frac{1}{3}y + 4$ のとき最大値

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{3}y + 4\right) + y = \frac{1}{3}y + 8$$

をとる.そして, $\frac{1}{3}y + 8$ は $y = 3$ のときに最大値 $\frac{1}{3} \cdot 3 + 8 = 9$ をとる.

最小値について,定義域より, $0 \leq y \leq 2$ のとき, $x = -2y + 4$ で最大値, $2 \leq y \leq 3$ のとき, $x = 3y - 6$ で最小値をとる.それぞれを計算すると,

$$2 \cdot (-2y + 4) + y = -3y + 8$$

$$2 \cdot (3y - 6) + y = 7y - 12$$

であり,どちらも $y = 2$ のときに最小値 2 をとる.

したがって,解答 1 と同じ結果を得る. ■

解答 1 のように,「平面図示」の方向性で解いてみると,条件式を満たす領域(多角形)と目的関数のグラフ(直線)は,容易に図示可能な図形であり,最大最小の条件も直線が多角形のある頂点を通る場合を考えればよい.一方,解答 2 のように,「文字固定」の方向性で解いてみると,条件の示す領域から変数の範囲を決めるのが容易ではなく,さらに多くの場合分けをしなければいけない.

参考文献

[1] 受験の月,

<http://examist.jp/mathematics/tahensu-maxmin/>