

数学教育におけるきれいな問題の作成法

2014SE016 林 元樹

指導教員 佐々木 克巳

1 はじめに

本研究の目的は、数学が苦手な生徒や初めて対象とする単元を学習する生徒でも取り組みやすい問題を作成することである。理由は問題作成の視点にたち数学の理解をより深めたいと考えたからである。主に [1] を用いて作成法を学び、そのしくみを定理としてまとめ、複数の場合に分けて具体例を挙げた。本研究は、通分して約分できる分数式の作成、因数分解可能な判別式を持つ 2 次方程式の作成、整数値の 3 辺ときれいな内角をもつ三角形の作成、ヘロン三角形を用いた問題作成、きれいな解をもつ対数方程式を行った。本稿では、通分して約分できる分数式の作成と因数分解可能な判別式を持つ 2 次方程式の作成を取り上げる。

2 通分して約分できる分数式

この節では、[1] を参考に、通分して約分できる分数式の計算問題の作成を行う。2.1 節で一般的な作成法について述べ、2.2 節で分数式の加減の式を用いた方法について述べる。

2.1 問題作成の方法

この節では、問題の一般的な作成法を示し、その方法を適用した例を示す。この節の作成法は次の定理にもとづいている。

定理 2.1.1 A, B, C, p, q, r を 6 つの整式とする。このとき

$$pC + qA = rB \quad (1)$$

ならば、この左辺を ABC で割って得られる。

$$\frac{p}{AB} + \frac{q}{BC} \quad (2)$$

は、通分すると B で約分できて、 $\frac{r}{AC}$ となる。

証明

$$\frac{p}{AB} + \frac{q}{BC} = \frac{pC + qA}{ABC} = \frac{rB}{ABC} = \frac{r}{AC}$$

つまり、(1) を満たす 6 つの整式 A, B, C, p, q, r に対し、(2) を計算する問題が、求める問題である。

次の例は [1] で紹介された例を上定の定理にもとづいた形で記述したものである。

例 2.1.2 (1) に対する等式として

$$3(x+1) - 2(x-1) = x+5$$

を考える。この左辺を $(x+1)(x-1)(x+5)$ で割ると

$$\frac{3}{(x-1)(x+5)} - \frac{2}{(x+1)(x+5)}$$

であり、これが求める問題である。実際、次のように約分できる。

$$\frac{3}{(x-1)(x+5)} - \frac{2}{(x+1)(x+5)} = \frac{3(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+5)(x+1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

このように p, q が定数のときは、適当な 2 つの一次式 A, B に対して (1) を満たす r と C を求めるのは容易である。実際 $r = 1, C = pA + qB$ とすればよい。

2.2 分数式の加減の式を用いた方法

この節では、前節の (1) をみたく A, B, C, p, q, r で p, q が定数でない例を見つける方法を示す。その方法は次の定理にもとづいている。定理の (3) の式を分数式の加減の式という ([1])。

定理 2.2.1 A, B, C, a, b, c を 6 つの整式とする。このとき

$$\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B}\right) + \left(\frac{c}{C} - \frac{b}{B}\right) = \frac{a}{A} + \frac{c}{C} \quad (3)$$

の左辺の各括弧内を通分して得られる。

$$\frac{aB + bA}{AB} + \frac{cB + bC}{BC} \quad (4)$$

はさらに通分すると B で約分できて

$$\frac{aC + cA}{AC} \quad (5)$$

となる。なお、(5) は (3) の左辺を通分した式である。

証明

$$\begin{aligned} \frac{aB + bA}{AB} + \frac{cB - bC}{BC} &= \frac{aBC + bAC}{ABC} + \frac{cAB - bAC}{ABC} \\ &= \frac{aBC + cAB}{ABC} \\ &= \frac{aC + cA}{AC} \end{aligned}$$

次の例は [1] で紹介された例を上定の定理にもとづいた形で記述したものである。

例 2.2.2 分数式の加減の式

$$\left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{2x+3}\right) + \left(\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{x+2}\right) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$

を考える. 左辺の各括弧内を通分して得た式が問題となり, 右辺を計算した値が解となる. 具体的に, 左辺の括弧内を通分した式は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{2x+3}\right) + \left(\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{x+2}\right) \\ &= \frac{2(2x+3) - (x-1)}{(x-1)(2x+3)} + \frac{(x+2) + (2x+3)}{(2x+3)(x+2)} \\ &= \frac{3x+7}{2x^2+x-3} + \frac{3x+5}{2x^2+7x+6} \end{aligned}$$

となり, これの最後の式が求める問題となる. 実際次のように約分できる.

$$\begin{aligned} & \frac{3x+7}{2x^2+x-3} + \frac{3x+5}{2x^2+7x+6} \\ &= \frac{3(2x+3)(x+1)}{(2x+3)(x-1)(x+2)} = \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

3 因数分解可能な判別式を持つ 2 次方程式

この節では, [1] を参考に, 分数式の加減の式

$$\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}\right) + \left(\frac{c'}{c} - \frac{a'}{a}\right) = \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} \quad (7)$$

を用いて, 因数分解可能な判別式を持つ 2 次方程式の作成を行う. ここで判別式とは, $B^2 - AC$ の形の式 (すなわち $Ax^2 + Bx + C = 0$ の判別式) である. この作成法は次の定理にもとづいている.

定理 3.1.1

(i) (7) は, $c = a'b + ab'$ のとき, 左辺の各括弧内と右辺を通分し, 両辺に abc をかけることで

$$c^2 - (ca' - c'a)b = (b'c + bc')a \quad (8)$$

となる.

(ii) (8) の左辺は $B^2 - AC$ (すなわち $Ax^2 + Bx + C = 0$ の判別式) の形をしていて, 右辺のように因数分解できる.

証明

(i) (7) の左辺の各括弧内と右辺を通分すると

$$\frac{a'b + ab'}{ab} + \frac{ac' - a'c}{ca} = \frac{b'c + bc'}{bc}$$

となり, さらに両辺に abc をかけると

$$c(a'b + ab') + b(ac' - a'c) = a(b'c + bc')$$

$$c(a'b + ab') - (ca' - c'a)b = (b'c + bc')a$$

となる. $c = a'b + ab'$ より

$$c^2 - (ca' - c'a)b = (b'c + bc')a$$

(ii) は明らかである.

したがって, 定理 3.1.1(i) のように (8) 式を作成し, $B = c, AC = (ca' - c'a)b$ とおくと, 因数分解可能な判別式 $B^2 - AC$ を得て, それを因数分解した結果は, $(b'c + bc')a$ ((8) の右辺) となる. つまり, この方法で得た

A, B, C に対し, 2 次方程式 $Ax^2 + Bx + C = 0$ の判別式は因数分解できる.

本研究では, 因数分解の結果が $()^2$ の形と, 和と差の積の形になる次の例を挙げた.

例 3.1.2 分数式の加減の式

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{3k+5}\right) + \left(\frac{-1}{5k+6} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{3k+5} + \frac{-1}{5k+6} \\ & \text{を考える. (この式は, (7) に } (a, b, c, a', b', c') = (2k+1, 3k+5, 5k+6, 1, 1, -1) \text{ を代入した式で, } a'b + ab' = (2k+1) + (3k+5) = c \text{ をみたとす). 左辺の各括弧内と右辺を通分し, 両辺に } (2k+1)(3k+5)(5k+6) \text{ をかけると} \\ & \frac{5k+6}{(2k+1)(3k+5)} - \frac{7k+7}{(5k+6)(2k+1)} = \frac{2k+1}{(3k+5)(5k+6)} \\ & \frac{(5k+6)^2 - (7k+7)(3k+5)}{(5k+6)^2 - (7k+7)(3k+5)} = (2k+1)^2 \end{aligned}$$

この左辺は以下の 2 つの 2 次方程式の判別式であり, 右辺は判別式を因数分解した式である.

$$\begin{aligned} & (7k+7)x^2 \pm 2(5k+6)x - (3k+5) = 0 \\ & (A = 7k+7, C = 3k+5 \text{ と見たとき}) \\ & (3k+5)x^2 \pm 2(5k+6)x - (7k+7) = 0 \\ & (A = 3k+5, C = 7k+7 \text{ と見たとき}) \end{aligned}$$

したがって, この 2 つの 2 次方程式の判別式は因数分解できて, その因数分解の結果はどちらも $(2k+1)^2$ となる.

例 3.1.3 分数式の加減の式

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{k-2} + \frac{1}{k+4}\right) + \left(\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k-2}\right) = \frac{1}{k+4} + \frac{1}{2k+2} \\ & \text{を考える (この式は, (7) に } (a, b, c, a', b', c') = (k-2, k+4, 2k+2, 1, 1, 1) \text{ を代入した式で, } a'b + ab' = (k+4) + (k-2) = 2k+2 = c \text{ をみたとす). 左辺の括弧内と右辺を通分し, 両辺に } (k-2)(k+4)(2k+2) \text{ をかけると} \\ & \frac{2k+2}{(k-2)(k+4)} - \frac{k+4}{(2k+2)(k-2)} = \frac{3(k+2)}{(k+4)(2k+2)} \\ & \frac{(2k+2)^2 - (k+4)^2}{(2k+2)^2 - (k+4)^2} = 3(k-2)(k+2) \end{aligned}$$

この左辺は以下の 2 次方程式の判別式であり, 右辺は判別式を因数分解した式である.

$$(k+4)x^2 \pm 2(2k+2)x + (k+4) = 0$$

したがって, この 2 次方程式の判別式は因数分解できて, その因数分解の結果は $3(k-2)(k+2)$ となる.

4 おわりに

本研究では, 高校数学の内容を問題作成の視点からより深く学ぶことができた. 問題作成を行って行く中で, 今まで気づけなかった視点や新たな考え方に触れることができたため, これからも続けていきたい.

参考文献

- [1] 斎木清治: 「高校数学 問題づくりの工具箱」. プレアデス出版, 大阪, 2007.