

# 安定多様体法を用いた非線形最適制御による横運動の飛行制御系設計

2014SC072 鈴木達朗

指導教員:坂本登

## 1 はじめに

実在するシステムは、一般的に非線形性を持っている。非線形最適制御問題における Hamilton-Jacobi 方程式は、一般的に解析解を導出することは困難であった。しかし、近年、本研究室の坂本登教授により Hamilton-Jacobi 方程式の新しい近似解法が提案された。提案された解法を安定多様体法と呼び [2]、さまざまな非線形系に対してその実用性が報告されている。

## 2 安定多様体法

非線形最適制御問題における Hamilton-Jacobi 方程式は、一般的に解析解を導出することは困難であるが、近年、坂本登教授により Hamilton-Jacobi 方程式の新しい近似解法が提案された。提案された解法を安定多様体法と呼び、大域的求解可能性、近似精度、計算量の面で優れており、されさまざまな非線形系にたいしてその実用性が報告されている。アクロバットシステム、戦闘機、磁気浮上システム、カオス軌道などに対して本理論を適用しあらゆる分野においてその有用性を検証、実証している。本節では、次のような非線形時不変システムに対し二次形式の評価関数を最小化する最適レギュレータ問題を取り扱う。

$$\begin{cases} \Sigma : \dot{x} = f(x) + g(x)u, x(0) = x_0 \\ J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $Q \geq 0, R \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  である。このシステムに動的計画法を適用する。このとき Hamilton-Jacobi 方程式

$$H \left( x, \bar{u} \left( x, \frac{\partial V}{\partial x} \right), \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (2)$$

の解  $V(x)$  が求められたとする。このときの最適フィードバック制御入力  $u^*(x)$  は、

$$u^*(x^*) = \bar{u} \left( x^*, \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

と与えられる。上式を式 2 に代入すると、Hamilton-Jacobi 方程式は、

$$H(x, p) = p^T f(x) - \frac{1}{4} p^T g(x) R^{-1} g(x)^T p + x^T Qx = 0 \quad (3)$$

となる。式 (3) の Hamiltonian  $H(x, p)$  に対する Hamilton の正準方程式は以下のように得られる。

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) \end{cases} \quad (4)$$

安定多様体についての文献より Hamilton-Jacobi 方程式 (2) の解  $V(x)$  の偏微分  $\partial V / \partial x$  と正準方程式 (4) の解  $p(x)$  は等価であることが示されている。

## 3 軌道計算に用いる状態変数

航空機の運動方程式は式 (5) から (7) のようになることが知られている。また、式 (5) から (7) に含まれる  $X, Y, Z, L, M, N$  には空力係数が含まれる。ただし、 $m$  : 質量,  $g$  : 重力加速度,  $\theta, \phi$  : 機体のピッチ角, ロール角,  $U, V, W$  :  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸方向の速度,  $p, q, r$  :  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸まわりの角速度,  $I_x, I_y, I_z$  :  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸まわりの慣性モーメント,  $I_{xz}$  : 慣性乗積とする。運動方程式は (5) から (10) に示す。

$$m(\dot{u} + qw - rv) = X - mg \sin \theta \quad (5)$$

$$m(\dot{v} + ru - pw) = Y + mg \cos \theta \sin \phi \quad (6)$$

$$m(\dot{w} + pv - qu) = Z + mg \cos \theta \cos \phi \quad (7)$$

$$I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr - I_{xz}(\dot{r} + pq) = L \quad (8)$$

$$I_y \dot{q} - (I_z - I_x)rp - I_{xz}(r^2 - p^2) = M \quad (9)$$

$$I_z \dot{r} - (I_x - I_y)pq - I_{xz}(\dot{p} + qr) = N \quad (10)$$

本報告で用いる横運動の航空機の微分方程式は、迎角, 横滑り角を  $\alpha, \beta$  とすると、式 (7), 式 (8), 式 (10) を用いて、以下の 3 式で表す。

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{mV_T} \{-\beta T \cos(\alpha) - Y\} \\ \frac{I_{zz}L_b + I_{xz}N_b - \{I_{xz}(I_{yy} - I_{xx} - I_{zz})p + \{I_{xz}^2 + I_{zz}(I_{zz} - I_{yy})\}r\}q}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \\ \frac{I_{xz}L_b + I_{xx}N_b - \{I_{xz}(I_{yy} - I_{xx} - I_{zz})r + \{I_{xz}^2 + I_{xx}(I_{xx} - I_{yy})\}p\}q}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

## 4 安定多様体法を用いた非線形最適制御によるフィードバックシミュレーション

本研究で用いる航空機モデルは本研究室大学院生の作成した Skyhogg を用いる。目標値は 3 つの変数ともに 0 である。安定多様体プログラムを用いて得られた軌道の集まりを多項式近似し、最適入力  $u$  を求める。その入力  $u$  を用いて  $\beta, p, r$  の応答を確認する。ここでは、非線形シミュレータに対する線形制御器を適用したフィードバックシミュレーションの結果と、同じシミュレータに対する非線形制御器を適用したフィードバックシミュレーションの結果を図 2 から図 4 に示す。この結果を用いて評価関数  $J$  を計算する。評価関数  $J$  は式 (12) の通りである。

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt$$

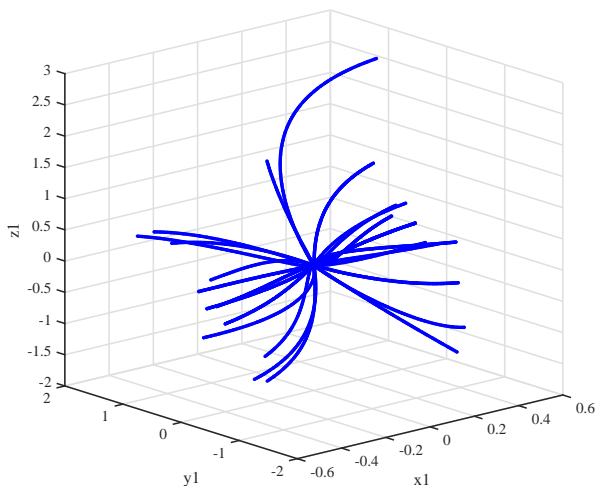


図1 skyhogg パラメータを用いた軌道の集まり

表1 非線形, 線形制御の応答の評価関数 J の値

非線形制御	0.0293
線形制御	0.1814

## 5 おわりに

本報告では横運動のみに対して線形, 非線形最適制御設計をし, 比較をした. 課題として, 本来安定多様体を用いて軌道の計算をし, パラメータ  $Q, R, \xi$  を変えて大量のシューティング線を計算した後, それが十分に立体的に広がる必要がある. また, 横方向のみに関する運動だけでは実際の航空機の運動を表しにくく差異が大きいため, 縦運動を合わせた 6 自由度の運動に対して非線形最適制御の適用に取り組む必要がある.

## 参考文献

- [1] 小原敦美, 井手政和, 山口恭弘, 大野正博, 「LFLEX 縦系飛行制御系の LPV モデリングとゲインスケジューリング制御」, システム制御情報学会論文誌, Vol.12, No.11, pp.655-663, 1999.
- [2] N.Sakamoto, 「Case studies on the application of the stable manifold approach for nonlinear optimal control design」, Automatica. Volume 49, Issue 2, pp,568-576, 2013.
- [3] 渡辺昭, 渡部慶二, 羅志偉, 遠藤茂, 「ゲインスケジューリングによる非線形システムの制御」, 計測自動制御学会東北支部第 197 開研究集会, 2001.

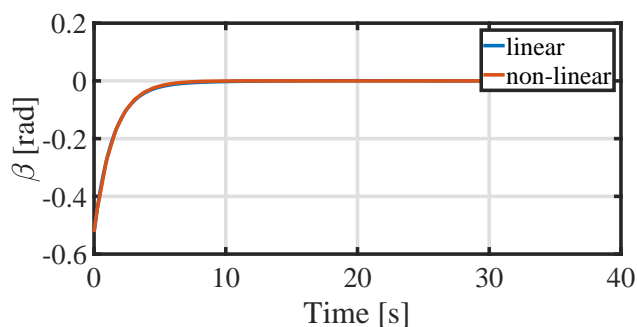


図2 非線形制御, LQ 制御を適用した横滑り角  $\beta$  の応答

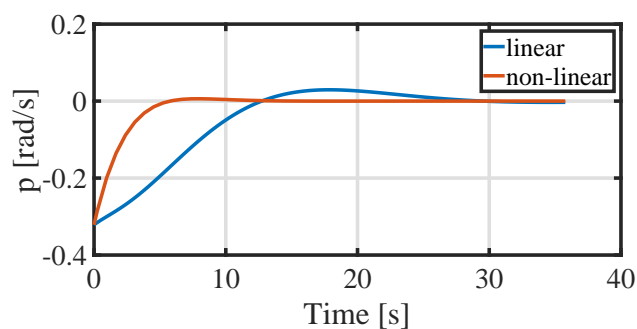


図3 非線形制御, LQ 制御を適用したロール角速度  $p$  の応答

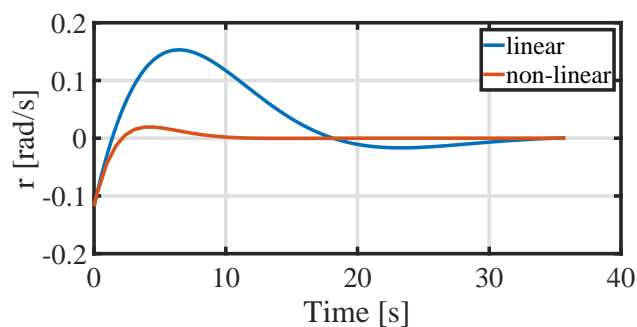


図4 非線形制御, LQ 制御を適用したヨー角速度  $r$  の応答