

# 惑星間飛行の軌道計算に対する最適制御的アプローチ

2014SC007 秦野江美香

指導教員：坂本登

## 1 はじめに

近年、宇宙工学などの宇宙技術が急速に進歩してきている。宇宙工学とは、宇宙開発に関連した工学の分野であり、地球の大気圏外を飛行するための理論・技術のことを示す。これにより、衛星や惑星探査機が開発され、宇宙空間の利用は人類の発展に不可欠なものとなっている [1]。また、宇宙開発といった、人類が宇宙に進出するための活動も活発化している。火星移住も計画されており、そのためには機体を目的の惑星の軌道上へ安全に到達させ、かつ燃料消費を抑えて飛行させることが重要となる。円軌道間の移行においては、一般にホーマン軌道と呼ばれる楕円軌道が用いられる。

先行研究を参考に、本研究では、二つの円軌道間を飛行する機体の軌道を最小のエネルギーで移行するホーマン軌道として表し、その軌道を最適制御における二点境界値問題を用いて求める。また本研究では用いる惑星の指定は行わず、先行研究で定められている軌道半径の比を用いてシミュレーションを行い、得られた軌道と出発時・到達時の推力の値で、ホーマン軌道との比較を行う。

## 2 二点境界値問題

境界値問題とは、境界条件と呼ばれる制限が与えられている微分方程式のことである。常微分方程式が1つ以上の境界値を満たすとき、この微分方程式は二点境界値問題と呼ばれる。

## 3 ホーマン軌道移行問題

ホーマン軌道とは、同一平面内の円軌道間の遷移を表す軌道のことである。内側の軌道から外側の軌道へ遷移する場合、内惑星軌道上の点を近地点、外惑星軌道上の点を遠地点とする楕円軌道へ機体を到達させることで、惑星間飛行が可能となる [2]。この軌道がホーマン軌道と呼ばれ、最小のエネルギーで目的の軌道上に到達可能という特徴を持つため、軌道間遷移の問題では多く用いられている。また、ホーマン型の遷移には到達時間は指定されていない。

### 3.1 運動方程式

本研究では、ホーマン軌道を用いて内惑星軌道から外惑星軌道への移行を示す。この軌道移行を図1で示す [3]。

ここで、

$T$ : 推力 [N]

$t_f$ : 到達時間 [s]

$r$ : 中心から宇宙機までの距離 [m]

$u$ : 半径方向の速度 [m/s]

$v$ : 接線方向の速度 [m/s]

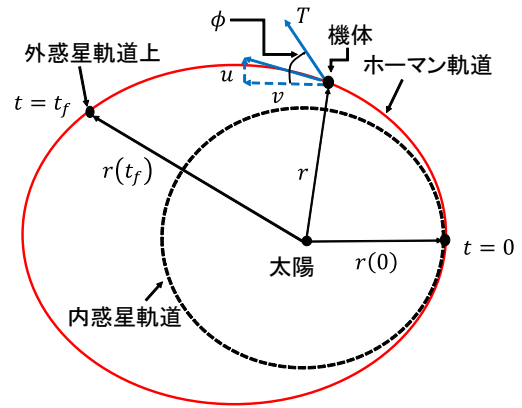


図1 ホーマン軌道

$m$ : 宇宙機の質量 [kg]

$\mu$ : 万有引力定数 [ $\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ ]

とする。本研究では、推力は常に軌道接線方向であると

とする。したがって、本研究で用いる微分方程式は、以下のよう

に表すことができる。

$$\dot{r} = u \quad (1)$$

$$\dot{u} = \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} \quad (2)$$

$$\dot{v} = -\frac{uv}{r} + \frac{T}{m} \quad (3)$$

この式を計算の簡単化のために無次元化 [4] し、最適制御で計算を行った。無次元化の式を以下に示す。 $T'$  は推力である。

$$\dot{r} = u \quad (4)$$

$$\dot{u} = \frac{v^2}{r} - \frac{1}{r^2} \quad (5)$$

$$\dot{v} = -\frac{uv}{r} + T' \quad (6)$$

本研究で用いる境界条件 (無次元化後)、評価関数、ハミルトニアンを以下のように定義する。

$$r(0) = r_0, \quad r(t_f) = R_0$$

$$u(0) = 0, \quad u(t_f) = 0$$

$$v(0) = \sqrt{\frac{1}{r_0}}, \quad v(t_f) = \sqrt{\frac{1}{R_0}}$$

$$J = \int_0^{t_f} T'^2 dt$$

$$H = p_1 u + p_2 \left( \frac{v^2}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + p_3 \left( -\frac{uv}{r} - \frac{p_3}{2} \right) + \frac{p_3^2}{4}$$

最適制御で計算を行うと、

$$\begin{aligned} \dot{r} &= u \\ \dot{u} &= \frac{v^2}{r} - \frac{1}{r^2} \\ \dot{v} &= -\frac{uv}{r} - \frac{p_3}{2} \\ \dot{p}_1 &= p_2 \left( \frac{v^2}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) - \frac{uv}{r^2} p_3 \\ \dot{p}_2 &= -p_1 + \frac{v}{r} p_3 \\ \dot{p}_3 &= -\frac{2v}{r} p_2 + \frac{u}{r} p_3 \end{aligned}$$

といった形の6次元連立方程式が得られる。これを二点境界値問題で解くことで軌道を得る。

#### 4 シミュレーション結果

先行研究 [5] で用いられている軌道半径の比  $K = \frac{R_0}{r_0}$  を用いて、式 (4)~(6) を数値的に解くことで、飛行時間  $t_f$  を概算で求めた (図 2)。ここでは、 $K = 11.94$  を目標軌道  $R_0$  とし、 $K = 1.5$  から値を徐々に大きくする方法を考えた。ただし、本研究では  $r_0 = 1$  とした。このとき  $t_f = 51.2105$  となる。

また、ホーマン軌道上を移行する機体は、内惑星軌道を出発するとき・外惑星軌道に入るときに増速を行うことがわかっている。これを基に軌道の検証を行う。結果を図 3 に示す。

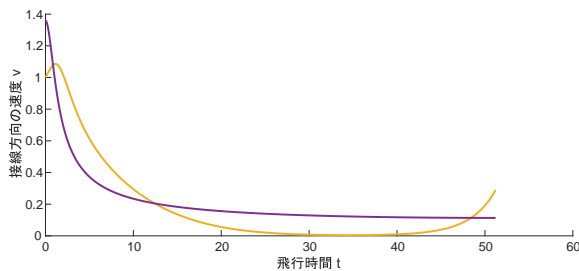


図 2 接線方向の速度  $v$

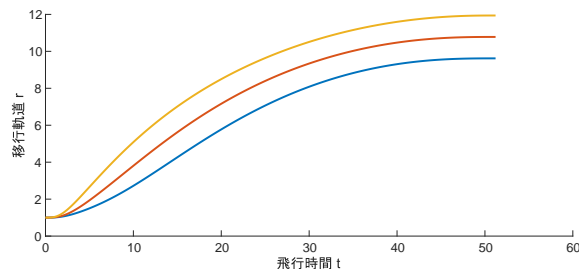


図 3 移行軌道  $r$

図 2 は、黄色線が  $K = 11.94$  で二点境界値問題で解いた場合、紫線は Matlab で初期値問題として解いた場合の

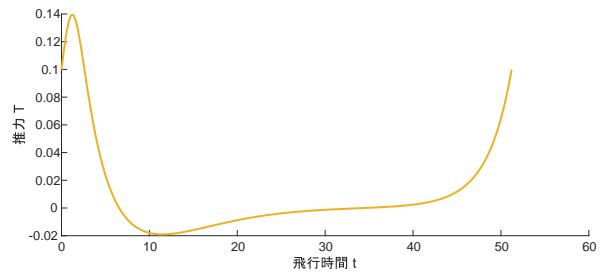


図 4 推力  $T(K=11.94)$

接線方向  $v$  のグラフである。初期値問題として解く際、初期値を  $v(0) + \Delta V_1$  (増速) としており、図より増速されていることがわかる。また、 $R_0$  に到達時にも  $\Delta V_2$  (増速) が加わるので、二点境界値問題でのグラフは、到達時に増速されていることがわかる。

図 3 に関して、下の線から順に、 $K = 9.62$ ,  $K = 10.78$ ,  $K = 11.94$  を示す。どの場合も境界条件を満たしており、内惑星を出発した機体がそれぞれの  $R_0$  の値に到達したときに、外惑星軌道へと入る。図 4 は、 $K = 11.94$  の時の推力  $T$  のグラフを示す。内惑星軌道の出発時・目標軌道への到達時に推力を与えることで増速を行い、それ以外の移行中はゼロに近い値を示す。したがって、この移行はホーマン軌道移行に非常に近いことがわかる。

#### 5 おわりに

本研究では、機体が内惑星軌道上を出発し、外惑星軌道上へ到達する移行軌道を最適制御における二点境界値問題を Matlab で解くことで、推力のグラフからホーマン軌道を示すことを検証した。今後の課題として、内惑星・外惑星の軌道半径を様々に変え、どの場合でも推力により出発時・到達時に増速を与えて、ホーマン軌道移行を示すか検証することがあげられる。

#### 参考文献

- [1] 文部科学省：『多分野の協力による研究開発の推進 宇宙開発』, [http://www.mext.go.jp/b\\_menu/hakusho/html/hpaa197701/hpaa197701\\_2\\_067.html](http://www.mext.go.jp/b_menu/hakusho/html/hpaa197701/hpaa197701_2_067.html).
- [2] JAXA 宇宙情報センター：『軌道遷移』, 2014, [http://spaceinfo.jaxa.jp/ja/orbital\\_transfer.html](http://spaceinfo.jaxa.jp/ja/orbital_transfer.html).
- [3] E.Bryson, Jr, Yu-Chi Ho：『Applied Optimal Control』, Ginn and Company, 1969, pp.66-67.
- [4] 『1 階常微分方程式の数値解法の学習』, 2011, <http://www-solid.eps.s.u-tokyo.ac.jp/~ataru/edu/ensyu3.pdf>.
- [5] 山川宏：『宇宙機の軌道と制御』, システム/制御/情報, Vol.54, No.5, 2010, pp.186-187.