粘菌アルゴリズムによる線形計画問題の解法

2014SS012 林　晃介

指導教員:小藤　俊幸

1　はじめに

本研究で扱う粘菌とは真性粘菌と言うもので, さらに具体的に名前を述べるとすればモジホコリという名前の粘菌である. 粘菌のもつ基本的な特性として, 粘菌自身の体を流用的に運動させて餌を補食する性質を持っており, 餌を配置するとそこに向かって管上に移動する. このことから, 変形菌とも言われている.
つぎに粘菌アルゴリズムとは、今から 10 年ほど前に日本人研究者 [1] によって提案されたグラフの最短経路問題の解法であり, 粘菌アルゴリズムを用いた数値実験の研究データは過去にも存在する. 本研究では、文献 [2] を用いてアルゴリズムの導出から、そのアルゴリズムを用いて線形計画問題 [3] を解けるのか判断するために数値実験を行う.

2　粘菌のもつ性質と有用性

粘菌の持つ性質とは何か. それは複数箇所に餌を配置されるとすべての餌を得るために餌から餌へと体を伸縮させるということである. この性質は最短経路問題の解決法の一つとしてあげることができる. 最短経路問題を解くときにもっとも有名とされているものはダイクストラ法である. しかし, この方法では正確な最短経路を識別することは可能であるものの, 複数箇所の目的地つまりノード数が多ければ多いほど必要な計算時間が過剰になってしまう. ここで, 最短経路を見つけるときの条件を三つ述べる.
-確実に最短経路を見つけるということ.
-経路検索の迅速性.
-情報の更新からの最短経路の再設定に対する適応性
粘菌はこの三つの条件を満たして経路を見つけることができる.

3　導出

粘菌アルゴリズムの導出 M, N を $M < N$ をみたす自然数とし，A を $M \times N$ 行列，$\boldsymbol{b}$ を M 次元ベクトル，$\boldsymbol{c}$ を N 次元ベクトルとする．ただし，$\mathrm{rank}\, A = M$，$\boldsymbol{c}$ の成分はすべて正と仮定する．そのとき，N 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を未知変数とする線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

を解くための粘菌アルゴリズムを考える。

変数 $x_j = x_j(t)$ は正の値を取り，

$$\frac{dx_j}{dt} = q_j(t) - x_j(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, N) \tag{2}$$

に従って時間発展するものとする．ここで，$q_j(t)$ は最適化問題

$$\begin{cases} \text{minimize } \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} r_j\, q_j^2 \\ \text{subject to } A\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b} \end{cases} \tag{3}$$

の解となるように定められているとする．ただし，$r_j = c_j / x_j$ である．Lagrange の未定乗数法により，$\boldsymbol{q}$ が (3) の最適解であるための必要十分条件は，M 次元ベクトルが存在して，$R = \mathrm{diag}(r_1, r_2, \ldots, r_N)$ について，

$$R\,\boldsymbol{q} - A^T \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

が成り立つことである．$\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{p}$ で表すと，$\boldsymbol{q} = R^{-1} A^T \boldsymbol{p}$ となり，これを $A\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}$ に代入すると，$\boldsymbol{p}$ に関する方程式 $L\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ が得られる．さらに，微分方程式 (2) を指数オイラー法で離散化すると，下記のアルゴリズムが得られる．

4　アルゴリズム

初期近似 $\boldsymbol{x}^0$ を適当に与えて，$\boldsymbol{x}^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を以下の手順で計算する．

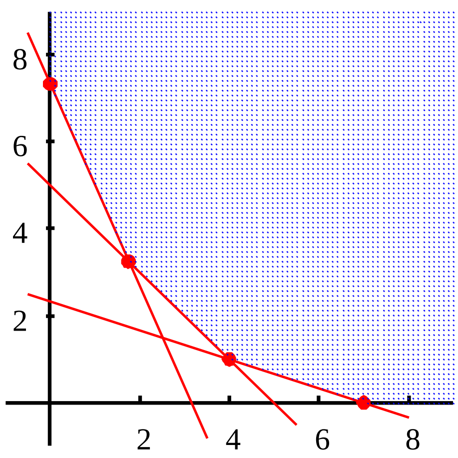
(1) 連立方程式 $L\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ を解いて，$\boldsymbol{p}$ を求める．ただし，

$$L = AWA^T, \quad W = \mathrm{diag}\left(\frac{x_1^n}{c_1}, \frac{x_2^n}{c_2}, \ldots, \frac{x_N^n}{c_N}\right) \tag{5}$$

(2) $\boldsymbol{q} = WA^T p$ とおき，

$$(x_j)_{n+1} = e^{-\Delta t}(x_j)_n + (1 - e^{-\Delta t}) q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, N) \tag{6}$$

により，$\boldsymbol{x}_{n+1}$ を求める．



5 数値実験

例題（ $M=3,\ N=5$）

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f=2x_1+x_2+0.1x_3+0.1x_4+0.1x_5 \\
\text{subject to} & x_1+x_2-x_3 \qquad\qquad = \ 5 \\
 & x_1+3x_2 \qquad -x_4 \qquad = 7 \\
 & 7x_1+3x_2 \qquad\qquad -x_5 \ = 22 \\
 & x_j \geq 0 \ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ 5)
\end{array} \tag{7}
$$

この問題の実行可能基底解は

$$
\begin{array}{l}
x_1=0,\ x_2=\dfrac{22}{3},\ x_3=\dfrac{7}{3},\ x_4=15,\ x_5=0 \\
x_1=7,\ x_2=0,\ x_3=2,\ x_4=0,\ x_5=27 \\
x_1=4,\ x_2=1,\ x_3=0,\ x_4=0,\ x_5=9 \\
x_1=\dfrac{7}{4},\ x_2=\dfrac{13}{4},\ x_3=0,\ x_4=\dfrac{9}{2},\ x_5=0
\end{array}
$$

の 4 つであり，最後が最適解（ $f=7.2$）となる．

6 アルゴリズムの実行結果

目的関数を 2 パターンで実験してみる．

目的関数と 初期値

b[0] = 5.0; b[1] = 7.0; b[2] = 22.0;

c[0] = 1.0; c[1] = 2.0; c[2] = 0.1; c[3] = 0.1; c[4] = 0.1;

x[0] = 0.8; x[1] = 5.0;

x[2] = 54.0/4.0; x[3] = 856.0; x[4] = 56.0;

n = 25

13.063590 1.733449, 2.354415

0.031139, 64.721270, 1.460692

n = 50

8.023304 2.962576, 1.938946

-0.021049, 6.944579, 4.904825

n = 75

7.075681 3.829693, 1.167910 0.003959, 0.757406, 8.340307

n = 100

6.889099 4.016576, 0.982902 -0.000000, 0.000086, 9.067097

c[0]=1,c[1]=2 の場合

100 回反復させた結果 x[0] は 4 に収束し ,x[1] は1 に収束した. したがって最適解は (4,1) となる。

b[0] = 5.0; b[1] = 7.0; b[2] = 22.0;

c[0] = 2.0; c[1] = 1.0; c[2] = 0.1; c[3] = 0.1; c[4] = 0.1;

x[0] = 0.8; x[1] = 5.0;

x[2] = 54.0/4.0; x[3] = 856.0; x[4] = 56.0;

n = 25

12.520955 0.884043, 3.849479

0.676797, 68.357056, 0.000042

n = 50

7.767901 1.555982, 3.586059

0.219469, 10.479321, 0.000000

n = 75

7.232204 1.747585, 3.246059

0.000000, 4.909745, 0.000000

n = 100

7.202643 1.749802, 3.249676

0.000000, 4.533634, 0.000000

c[0]=2,c[1]=1 の場合

100 回反復させた結果 x[0] は 1.75,x[1] は 3.25 に収束した. したがって最適解は (1.75,3.25) となる．b[0]=7.0 にした場合

n = 200

9.705525 6.993094, 0.006906

0.000000, 0.013813, 26.972377

基底解として (7.0,0.0) を導けた.

次に b[0]=6.0 にした場合

n = 200, 8.300000

5.500001, 0.499999

0.000000, 0.000000, 18.000003

となり 基底解ではない (5.5,0.5) という 解が出てきた.

7 おわりに

この研究で粘菌アルゴリズムで線形計画問題を解ける場合と解けない場合が存在するということが分かった．解けない場合があるのは、まだこのアルゴリズムは改良の予知があると 言えるだろう．この研究をしたことで, まだまだ未完成な粘菌アルゴリズムについて様々な実験をし , 研究できとても良かった.

参考文献

[1] A. Tero, R.kobayashi, T. NAkagiri A mathematical model for adaptive transport network in path finding by true slime mold,Journal of Theoretical Biology,244(2007),553-564.

[2]『 ON A NATURAL DYNAMICS FOR LINEAR PROGRAMMING』. DAMIAN STRASZAK AND NISHEETH K.VISHIOI,preprint 2015.

[3] 福島雅夫:『 新版 数理計画入門』. 朝倉書店, 東京,1996.