

CVaR を用いたロバストポートフォリオ最適化

2014SS088 梅村一輝

指導教員：福嶋雅夫

1 はじめに

社会の IT 化に伴い、誰もが手軽に投資できる時代となった。複数の資産があるなかで、どれだけの資産にどれだけ投資すればよいかを数学的手法を用いて分析する問題をポートフォリオ最適化問題という。ポートフォリオのリスク尺度として様々なものが提唱されており、その中にバリュー・アット・リスク (Value-at-Risk, VaR) や条件付きバリュー・アット・リスク (Conditional Value-at-Risk, CVaR) がある [2]。CVaR はリスク尺度として好ましい性質であるコヒーレント性を持つことが知られている。リスク尺度に CVaR を用いる場合には各資産の収益率の分布を定めなければならないが、実際に各資産の収益率の分布を完全に把握することは困難なので、収益率の分布が不確実な状況で投資をする必要がある。そこで、本研究では過去の収益率データを用いてさまざまな状況に対応した複数の確率分布を生成し、それらの確率分布から構成される不確実性集合に対するロバストポートフォリオ最適化問題を考え、その有用性を示す。

2 VaR と CVaR

投資対象となる資産を $i = 1, \dots, n$ とし、資産 i に対する投資比率を x_i 、資産 i の収益率を確率変数 y_i で表す。以下では $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ 、 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ と表し (太字はベクトル)、 \mathbf{x} をポートフォリオと呼ぶ。損失関数を $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とし、 \mathbf{y} は確率分布関数 $F(\mathbf{y})$ をもつと仮定する。そのとき、損失が α を超えない確率は

$$\Psi(\mathbf{x}, \alpha) = \int_{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \alpha} dF(\mathbf{y})$$

で与えられる。ポートフォリオ \mathbf{x} が与えられたとき、VaR はポートフォリオ \mathbf{x} の損失が α 以下となる確率が β 以上になるような最小の α 、すなわち

$$\text{VaR}_\beta(\mathbf{x}) = \min \{ \alpha \mid \Psi(\mathbf{x}, \alpha) \geq \beta \}$$

となる。また、CVaR はポートフォリオの損失が VaR を超える場合の損失の期待値であり、

$$\text{CVaR}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{1-\beta} \int_{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \text{VaR}_\beta(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dF(\mathbf{y})$$

と表される。ここで関数 $G_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$ を

$$G_\beta(\mathbf{x}, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{\mathbf{y} \in R^n} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha]^+ dF(\mathbf{y})$$

と定義する。ただし、 $[t]^+ = \max\{t, 0\}$ である。損失関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が \mathbf{x} に関する凸関数ならば、関数 $G_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$ は変

数 (\mathbf{x}, α) に関する凸関数になる。このとき、 $\text{CVaR}_\beta(\mathbf{x})$ と関数 $G_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$ に対して次式が成り立つ。

$$\text{CVaR}_\beta(\mathbf{x}) = \min_{\alpha \in R} G_\beta(\mathbf{x}, \alpha) \quad (1)$$

3 ロバスト最適化

ロバスト最適化とは、問題を構成するデータが不確実性を有する場合にも、信頼できる結果が得られるような最適化問題のモデリング技法のことである [1]。一般的なロバスト最適化では、問題を構成するデータが含まれていると考えられる不確実性集合を仮定して、その集合における最悪の場合の最適化が達成されるように定式化する。本研究では、リスク尺度として CVaR を利用する問題に対して、確率変数であるデータが従う確率分布の不確実性集合を考え、その不確実性集合に対する最悪な場合の最適化という形で定式化する [3, 4]。

確率分布の不確実性集合を P と表すと、ポートフォリオ \mathbf{x} の最悪の CVaR (Worst-case CVaR, WCVaR) は以下で定義される。

$$\text{WCVaR}_\beta(\mathbf{x}) \equiv \sup_{F(\cdot) \in P} \text{CVaR}_\beta(\mathbf{x})$$

4 混合分布

確率分布関数 $F(\cdot)$ の不確実性集合 P を、有限個の確率分布関数 $F^i(\cdot)$, $i = 1, \dots, l$ 、の凸 1 次結合で表す。

$$P \equiv \left\{ \sum_{i=1}^l \lambda_i F^i(\cdot) : \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, l \right\}$$

また、関数 $G_\beta^i(\mathbf{x}, \alpha)$, $i = 1, \dots, l$ 、と $G_\beta^L(\mathbf{x}, \alpha)$ を次式で定義する。ただし、 $L \equiv \{1, 2, \dots, l\}$ とする。

$$G_\beta^i(\mathbf{x}, \alpha) \equiv \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{\mathbf{y} \in R^n} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha]^+ dF^i(\mathbf{y}),$$

$$G_\beta^L(\mathbf{x}, \alpha) \equiv \max_{i \in L} G_\beta^i(\mathbf{x}, \alpha)$$

関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が \mathbf{x} の凸関数ならば、 $G_\beta^i(\mathbf{x}, \alpha)$ と $G_\beta^L(\mathbf{x}, \alpha)$ は (\mathbf{x}, α) の凸関数である。式 (1) より、以下の定理が成立する。

定理 1 任意のポートフォリオ \mathbf{x} に対して、不確実性集合 P に関する $\text{WCVaR}_\beta(\mathbf{x})$ は次式で与えられる。

$$\text{WCVaR}_\beta(\mathbf{x}) = \min_{\alpha \in R} \max_{i \in L} G_\beta^i(\mathbf{x}, \alpha) = \min_{\alpha \in R} G_\beta^L(\mathbf{x}, \alpha)$$

5 定式化

定理 1 と $G_\beta^L(\mathbf{x}, \alpha)$ の定義より, $\text{WCVaR}_\beta(\mathbf{x})$ を最小化する問題は以下の問題と等価である.

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{\mathbf{y} \in R^m} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha]^+ dF^i(\mathbf{y}) \leq \theta, i = 1, \dots, l \\ & (\mathbf{x}, \alpha, \theta) \in X \times R \times R \end{aligned}$$

ここで X は実行可能なポートフォリオの集合である. しかし, この問題に含まれる積分は計算が難しいので, モンテカルロシミュレーションを用いて近似する. 一般に, 収益率 \mathbf{y} の確率分布関数が $F(\mathbf{y})$ のとき, 関数 $G_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$ は

$$\tilde{G}_\beta(\mathbf{x}, \alpha) = \alpha + \frac{1}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{[k]}) - \alpha]^+$$

で近似できる [3]. ここで, $\mathbf{y}_{[k]}$ は確率分布関数 $F(\mathbf{y})$ を用いて生成された k 番目のサンプル, S はサンプル数である. よって, 関数 $G_\beta^i(\mathbf{x}, \alpha)$ を用いて, WCVaR を最小化する問題は以下で近似できる.

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \alpha + \frac{1}{S^i(1-\beta)} \sum_{k=1}^{S^i} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{[k]}^i) - \alpha]^+ \leq \theta, i = 1, \dots, l \\ & (\mathbf{x}, \alpha, \theta) \in X \times R \times R \end{aligned}$$

ただし, それぞれの $i = 1, \dots, l$ に対して, $\mathbf{y}_{[k]}^i$ は確率分布関数 $F^i(\mathbf{y})$ を用いて生成された k 番目のサンプル, S^i はサンプル数である. 補助変数 $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1; \dots; \mathbf{u}^l) \in R^N$, ただし $N = \sum_{i=1}^l S^i$, を用いると, WCVaR を最小化する問題は以下のように定式化できる.

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in X \\ & \alpha + \frac{1}{1-\beta} \frac{1}{S^i} \sum_{k=1}^{S^i} u_k^i \leq \theta, i = 1, \dots, l \\ & u_k^i \geq f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{[k]}^i) - \alpha, k = 1, \dots, S^i, i = 1, \dots, l \\ & u_k^i \geq 0, k = 1, \dots, S^i, i = 1, \dots, l \end{aligned}$$

関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が \mathbf{x} の凸関数ならば, これは凸計画問題である.

6 数値実験

数値実験では, トヨタ自動車, ローソン, 中部電力の 3 つの銘柄について, 2007 年から 2015 年までの実際の株価データを用いる. また各銘柄の収益率を $\frac{\text{当日の株価} - \text{前日の株価}}{\text{前日の株価}}$ によって定め, 各年度における収益率データのサンプル数を $S^i = 242^*1, i = 07, \dots, 15$ とし, 収益率データのサンプル $\mathbf{y}_{[k]}^i, k = 1, \dots, 242$ を得る. また $\beta = 0.9$ とし $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{[k]}^i) = -\mathbf{x}^T \mathbf{y}_{[k]}^i$ とする.

*1 株価収集で参考にした個別銘柄株価データ (<http://k-db.com/stocks/>) において, 休日など株価が変動しない日を除いた 1 年分の株価データが 243 個であったためである.

第 5 節のモデルを用いてロバストポートフォリオを求め, これを \mathbf{x}^* とする. 次に各年度の分布のもとでの最適 (CVaR_β が最小となる) ポートフォリオを求め, これらを $\mathbf{x}^i (i = 07, 08, \dots, 15)$ とする. \mathbf{x}^* と $\mathbf{x}^i (i = 07, 08, \dots, 15)$ に対して, 各年度の分布のもとでの CVaR_β を計算し, それらを比較した結果を図 1 に示す.

図 1 より, 2007, 2010 年の分布のもとで $\text{CVaR}_\beta(\mathbf{x}^*)$ はそれぞれ $\text{CVaR}_\beta(\mathbf{x}^{07}), \text{CVaR}_\beta(\mathbf{x}^{10})$ の次に小さく, また半分以上の年度で $\text{CVaR}_\beta(\mathbf{x}^*)$ はその年度の最適ポートフォリオの $\text{CVaR}_\beta(\mathbf{x}^i)$ と近くなるのが観測される. このことから, 様々な状況のもとで, $\text{CVaR}_\beta(\mathbf{x}^*)$ が総体的に小さい (リスクが小さい) ことが確認できた.

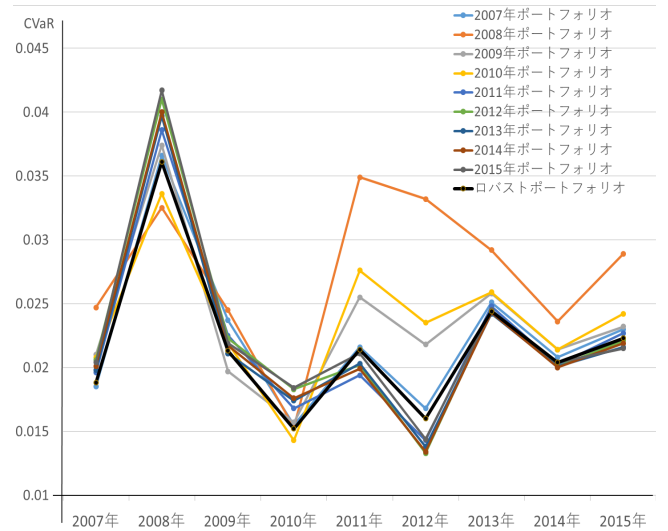


図 1 各年の分布のもとにした各ポートフォリオの CVaR

7 おわりに

本研究では, 過去の収益率データを用いた数値実験により, ロバストポートフォリオ最適化の有用性を示した. 多くの銘柄に対してサンプル数を増やして, より詳細な実験を行うのが今後の課題である.

参考文献

- [1] A. Ben-Tal and A. Nemirovski: *Robust Optimization - Methodology and Applications*. Mathematical Programming, Vol.92, pp.453-480, 2002
- [2] 山井康浩, 吉羽要直: バリュアット・リスクと期待シヨートフォールの比較分析. Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.45, pp.99-101, 2001.
- [3] S. Zhu and M. Fukushima: *Worst-Case Conditional Value-at-Risk with Application to Robust Portfolio Management*. Operations Research, Vol.57, pp.1155-1168, 2009.
- [4] 梅田零: リスク尺度に CVaR を用いるロバストポートフォリオ最適化問題. 京都大学工学部情報学科数理工学コース卒業論文, 2012.