

磁気軸受の弾性ロータモデルに対する 同一次元オブザーバを用いた出力フィードバック制御

2013SE204 高木健富

指導教員：高見勲

1 はじめに

磁気軸受とは「回転体を磁気的な力により完全非接触で支持する軸受」[1]である。そのため、摩擦・摩耗の問題をなくすことができ、超高速回転させることができる。しかし、常に磁気的な力を必要とするため制御が必要になり、またそのためにモデルが必要となってくる。磁気軸受のロータは、最高回転数がロータ自身の曲げ変数による危険速度以下で運転される剛性ロータと、曲げ危険速度以上で回転される弾性ロータに分けることができる。回転数をあげ、より実用的に考えるために、弾性ロータを考慮した振動制御を目指す。そのため本研究では、その基礎となる弾性ロータのモデルを導出する。有限要素法を用いてロータを3質点に分けて考えモデルを導出し、固有値解析を行いロータの持つ固有振動数を確認する。またモード解析を用いて物理座標からモード座標変換し、低次元化モデルを導出しこれを用いて制御器設計を行う。さらに本実験機は、両端の鉛直・垂直方向にしかセンサーがないためその他の変数を観測することができない。そこで同一次元オブザーバを用いて観測できない変数を推定する。

2 モデリング

図1に磁気軸受の弾性ロータモデルの概略図を示す。有限要素法を適用することによって図1に示すようにロータを3つに分けて考える。本研究では、水平方向と鉛直方向を同一の動きを考えると考え鉛直方向のみを考える。\$x, \theta\$ はそれぞれ各質点での変位と傾きを表す。この図1に対して

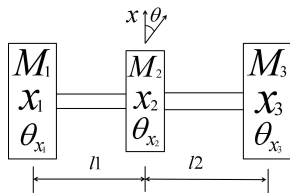


図1 磁気軸受の弾性ロータモデル

ラグランジュ法を用いて多自由度振動系の運動方程式 [2] が次式で与えられる。

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + K_0q = f \quad (1)$$

\$M\$ は慣性力を含む質量行列、\$C\$ は減衰行列、\$K_0\$ は剛性行列を示し、以下のように表す。本研究では減衰行列 \$C\$ は省略する。全変位ベクトル \$q\$ は以下のように定義する。ま

た、\$M \ge 0, K_0 \ge 0\$ であり、\$j = \{x_1, x_3\}\$ とする。

$$M = \begin{bmatrix} M_{x_1} & O_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & M_{x_2} & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} & M_{x_3} \end{bmatrix}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} K_{111} & K_{112} & O_{2 \times 2} \\ K_{121} & K_{122} + K_{222} & K_{223} \\ O_{2 \times 2} & K_{232} & K_{233} \end{bmatrix}$$

$$q = [x_1 \quad \theta_{x_1} \quad x_2 \quad \theta_{x_2} \quad x_3 \quad \theta_{x_3}]^T$$

$$f = [f_j \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad f_j \quad 0]$$

ただし、

$$M_{x_1} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix}, M_{x_2} = \begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}, M_{x_3} = \begin{bmatrix} m_3 & 0 \\ 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

$$K_{111} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{l_1^3} & \frac{6EI_1}{l_1^2} \\ \frac{6EI_1}{l_1^2} & \frac{4EI_1}{l_1} \end{bmatrix}, K_{112} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI_1}{l_1^3} & \frac{6EI_1}{l_1^2} \\ -\frac{6EI_1}{l_1^2} & \frac{2EI_1}{l_1} \end{bmatrix}$$

$$K_{121} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI_1}{l_1^3} & -\frac{6EI_1}{l_1^2} \\ \frac{6EI_1}{l_1^2} & \frac{2EI_1}{l_1} \end{bmatrix}, K_{122} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{l_1^3} & -\frac{6EI_1}{l_1^2} \\ -\frac{6EI_1}{l_1^2} & \frac{4EI_1}{l_1} \end{bmatrix}$$

$$K_{222} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_2}{l_2^3} & \frac{6EI_2}{l_2^2} \\ \frac{6EI_2}{l_2^2} & \frac{4EI_2}{l_2} \end{bmatrix}, K_{223} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI_2}{l_2^3} & \frac{6EI_2}{l_2^2} \\ -\frac{6EI_2}{l_2^2} & \frac{2EI_2}{l_2} \end{bmatrix}$$

$$K_{232} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI_2}{l_2^3} & -\frac{6EI_2}{l_2^2} \\ \frac{6EI_2}{l_2^2} & \frac{2EI_2}{l_2} \end{bmatrix}, K_{233} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_2}{l_2^3} & -\frac{6EI_2}{l_2^2} \\ -\frac{6EI_2}{l_2^2} & \frac{4EI_2}{l_2} \end{bmatrix}$$

とする。電磁石の吸引力式は以下の式が与えられる。

$$f_j = k \frac{(b + (I_j + i_j))^2}{(q - G_0)^2} - k \frac{(b - (I_j + i_j))^2}{(q + G_0)^2}$$

ロータは動作量が微小なため、電磁石の吸引力式を平衡点で一次近似する。近似した式は以下ようになる。

$$f_j = k \frac{4bI_j}{G_0^2} + p_{xj}q + p_{cj}i_j \quad (2)$$

$$p_{xj} = k \frac{4(b^2 + I_j^2)}{G_0^3}, p_{cj} = \frac{4b}{G_0^2}$$

制御入力を \$u = [i_{x_1} \quad i_{x_3}]^T\$ として、式 (1) と式 (2) より以下の式が得られる。また、行列 \$F\$ は電磁石の配置場所を表す。

$$M\ddot{q} + Kq = Fp_{cj}u \quad (3)$$

$$K = K_0 - P_x, P_x = \text{diag}([p_{xx_1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad p_{xx_3} \quad 0])$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

ここで、式 (3) において入力電流を 0 として固有値解析を行い、固有振動数と固有モードベクトルを得る。得た固有振動数より 1 つ目の共振点は 319.78[Hz] の時であること

がわかった。固有モードベクトルを並べたモード行列を用いてモード座標への変換を行う。正規化されたモード行列を用いて $q = \Phi \xi$ と定義し、これを用いて式 (3) をモード座標系に変換すると以下の式になる。

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \Phi^T F p_{cj} u \quad (4)$$

ただし、 I, ω^2 は以下のようになる。

$$I = \Phi^T M \Phi, \omega^2 = \Phi^T K \Phi \quad (5)$$

式 (4) を状態方程式の形に変換すると以下のようになる。

$$\begin{cases} \dot{x}_f = A_f x_f + B_f u \\ y = C x_f \end{cases}$$

$$x_f = [\xi \quad \dot{\xi}]^T, u = [i_{x_1} \quad i_{x_3}]^T$$

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T F p_{cj} \end{bmatrix}$$

$$C = C_0 \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}, C_0 = [F \quad 0]$$

3 低次元化モデル

モード座標 $\xi \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ に定めモード座標変換を行うことで、 r の数によって選択した弾性モードまでを考慮した低次元化モデルを導出することができる。モード行列は $\Phi_r \in \mathbb{R}^{r \times 6}$ となりこれを用いてモード座標系に変換し、状態方程式の形にしたものが以下のようになる。

$$\begin{cases} \dot{x}_s = A_s x_s + B_s u \\ y = C_s x_s = [x_1 \quad x_3]^T \end{cases}$$

4 制御器設計

$r = 3$ として、1 次モードまで考慮したモデルに対して制御器設計を行う。推定値 $\hat{x}(t)$ として推定誤差を $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ と定めると同一次元オブザーバを用いた出力フィードバック形式のコントローラは以下のように求められる。

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_s = A_s \hat{x}_s + B_s u - L(y - C \hat{x}_s) \\ u = K \hat{x}_s \end{cases}$$

分離定理より状態フィードバック形式のコントローラ K とオブザーバゲイン L を独立に最適レギュレータを用いて設計する。

5 シミュレーション

表 1 に実験機の物理定数を表す。初期変位 x_1 に $1.0 \times 10^{-6} [m]$ 与えて、シミュレーションを行った。図 2 に質点 1 の変位 x_1 のグラフを、図 3 に質点 3 の変位 x_3 のグラフを、図 4 に質点 2 の変位 x_2 のグラフを示す。また弾性一次モードのモデルに対して設計したコントローラを $r = 6$ の低次元化していないモデルに適用してシミュレーションを行った。図 5 に質点 1 の変位 x_1 のグラフを示す。図 5 より、制御系設計のために低次元化モデルを導出する際に無視した高次モードが制御系に悪影響を及ぼすスピルオーバー現象を確認した。

表 1 物理定数

質量	m_1, m_3	6.9855×10^{-2}	kg
質量	m_2	4.1837×10^{-2}	kg
慣性モーメント	J_1, J_3	3.4436×10^{-5}	kgm ²
慣性モーメント	J_2	4.7438×10^{-5}	kgm ²
ヤング率	E	66.8×10^9	N/m ²
間の距離	l_1, l_2	9.6329×10^{-2}	m
断面二次モーメント	I_1, I_2	4.607×10^{-10}	m
センサーの定常値	G_0	3.937×10^{-4}	m
吸引力定数	k	2.8×10^{-4}	[-]
垂直方向の定常電流	I_{x1}, I_{x3}	4.9278×10^{-1}	A
バイアス電流	b	0.5	A

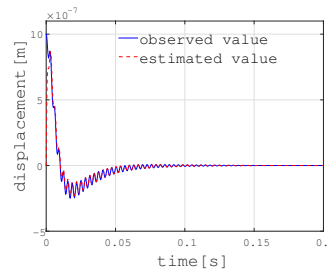


図 2 質点 1 の変位 x_1

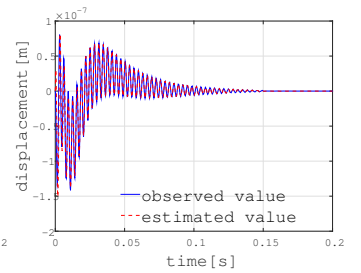


図 3 質点 3 の変位 x_3

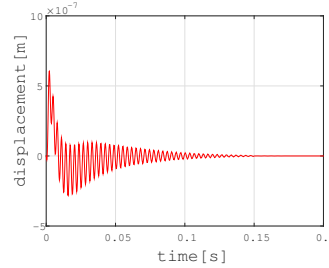


図 4 質点 2 の変位 x_2

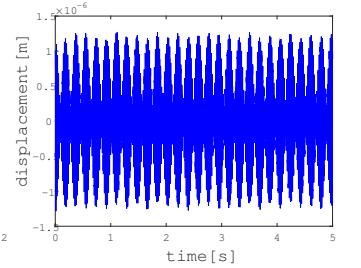


図 5 スピルオーバー現象

6 おわりに

有限要素法を用いた弾性ロータの 3 質点モデルを導出し、モード解析を用いて低次元化モデルを導出した。弾性一次モードまでの低次元化モデルに対し同一次元オブザーバを用いて推定し観測値と一致することができ、ロータの安定化を行うことができた。また、スピルオーバー現象をシミュレーションにて確認した。今後の課題としては、分割する数を増やしより厳密なモデルの導出、またスピルオーバー現象に対してロバスト性を保証する制御を行うことである。

参考文献

- [1] 電気学会磁気浮上応用技術調査専門委員会, “磁気浮上と磁気軸受”, コロナ社, 1993.
- [2] 野波健蔵, “磁気浮上・磁気軸受制御の現状と制御理論”, 計測と制御第 32 巻 4 号, 1993.