

二重物理振子の倒立制御

2013SE190 白井一成

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

本研究ではまず剛体力学について学び [2,3,4], 振り子の力学系について検討を始めた. そして倒立振子を制御するシミュレーションを行う. その振り子を多関節にし, 静止倒立に制御することを目標とする. 昨年, 伊藤 [1] は, 単振り子を連結した二重振子の倒立制御を行った. 今回は, 腕に質量のある多重物理振子の倒立制御を研究する.

まず, 線形制御理論について簡単に解説する. 次に, 腕に質量のある多重物理振子の力学モデルについて述べる. その例として, 二重物理振子の運動方程式を示す. 数値シミュレーションの結果については, 口頭で説明することにする.

2 可制御性

梶原 [5] 参照

m 入力をもつ n 次系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

に対して, 状態フィードバック (state feedback)

$$u(t) = -Fx(t) \quad (2)$$

を行うとき, 閉ループ系 (closed-loop system) は

$$\dot{x}(t) = (A - BF)x(t) \quad (3)$$

となる. これにより, 行列 $A - BF$ の各要素が変化することから, 状態フィードバックゲイン F の選び方によっては時間応答の改善が期待できる. 系 (1) の可制御性 (controllability) は, つぎのように定義される.

[定義 4.2] n 次系 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ が可制御とは, 任意の初期状態 $x(0)$ を, 任意の有限時間内 $0 \leq t \leq t'$ に, 任意の状態 $x(t')$ に移行させるような制御入力 $u(t)$ が存在することをいう.

可制御性については, 次の定理が成り立つ.

[定理 4.2] 以下の 4 つの条件は等価であり, n 次系 (1) が可制御であるための必要十分条件である.

定義 4.2: 任意初期状態を, 任意有限時間内に, 任意状態に移動可能

条件 C1: $\int_0^t \exp(A\tau)BB^T \exp(A^T\tau)d\tau > 0 \quad (\forall t > 0)$

条件 C2: $\text{rank} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n$

条件 C3: F を選んで, $A - BF$ の固有値を任意に設定可能

行列 $C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ を可制御行列という.

3 多重倒立振子の力学モデル

n 重物理振子は, n 本の棒 A_1, A_2, \dots, A_n を関節で直列につないだものである. 棒 A_i の両端点の座標を r_{i-1}, r_i とする. 棒 A_i は棒 A_{i-1} と r_{i-1} で関節し, 棒 A_{i+1} と r_i で関節する. A_i は長さ $l_i = \|r_i - r_{i-1}\|$, 質量 m_i の均質な棒で太さを 0 とする.

図 1 の様に x 軸上を動く支点 $r_0 = (x, 0)$ と $n-1$ 個の点 r_1, r_2, \dots, r_{n-1} を関節として, 棒 $A_i (1 \leq i \leq n)$ は y 軸となす角 θ_i を自由に取れるものとする.

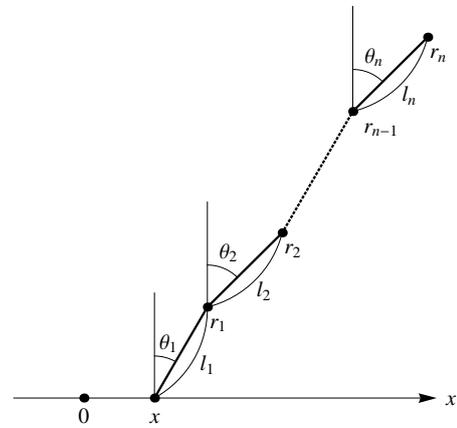


図 1 多重振子

3.1 関節角の時間変化に関する微分方程式

y 軸となす角が θ の単位ベクトルを,

$$e(\theta) = (\sin \theta, \cos \theta)$$

と定義する. その θ による微分を

$$e'(\theta) = \frac{d}{d\theta}e(\theta) = (\cos \theta, -\sin \theta),$$

$$e''(\theta) = \frac{d^2}{d^2\theta}e(\theta) = (-\sin \theta, -\cos \theta)$$

と書く. $e''(\theta) = -e(\theta)$ である.

端点 r_i を時間 t で 2 回微分すると, 加速度は,

$$\ddot{r}_0 = (\ddot{x}, 0),$$

$$\ddot{r}_i = \ddot{r}_{i-1} + l_i \{ \ddot{\theta}_i e'(\theta_i) + \dot{\theta}_i^2 e''(\theta_i) \} \quad (1 \leq i \leq n). \quad (4)$$

である.

関節 $r_i (0 \leq i \leq n-1)$ が A_{i+1} を押す力を S_i とする. 作用・反作用の法則より関節 r_i は A_i を $-S_i$ で押すことになる. したがって A_i に働く力は,

$$F_i = S_{i-1} - S_i + m_i g \quad (S_n = 0).$$

ここで、 $\mathbf{g} = (0, -g)$, $g \cong 9.8$ は重力加速度である。
以上より、棒 A_i の重心 \mathbf{c}_i の並進運動の運動方程式は、

$$m_i \ddot{\mathbf{c}}_i = \frac{1}{2} m_i (\ddot{\mathbf{r}}_{i-1} + \ddot{\mathbf{r}}_i) = F_i = S_{i-1} - S_i + m_i \mathbf{g} \quad (5)$$

$$(1 \leq i \leq n)$$

となる。ただし $S_n = 0$ である。

次に、重心 \mathbf{c}_i の周りの回転運動の方程式は、棒 A_i の重心 \mathbf{c}_i 周りの慣性モーメント

$$I_i = \frac{1}{12} m_i l_i^2 \quad (1 \leq i \leq n) \quad (6)$$

を用いて計算していき

$$\frac{m_i}{6} l_i^2 \ddot{\theta}_i = l_i \mathbf{e}(\theta_i) \times (S_{i-1} + S_i) \quad (1 \leq i \leq n). \quad (7)$$

となる。

(4), (5), (7) より $\ddot{\mathbf{r}}_i$ と S_i を消去して θ_i と x に関する微分方程式を得る。

4 二重物理振子の静止倒立制御

3.1 節で $n = 2$ とし、(4), (5), (7) から S_i と \mathbf{r}_i を消去すると θ_i と x に関する微分方程式 (8), (9) を得る。

$$\ddot{\theta}_1 = g_1(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2) + h_1(\theta_1, \theta_2) \ddot{x}, \quad (8)$$

$$\ddot{\theta}_2 = g_2(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2) + h_2(\theta_1, \theta_2) \ddot{x}. \quad (9)$$

g_1, g_2 は $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2$ の関数、 h_1, h_2 は θ_1, θ_2 の関数である。

4.1 二重物理振子の可制御性

式 (8), (9) を $w = (\tau_1, \tau_2, \theta_1, \theta_2, v, x) = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, x) \in \mathbb{R}^6$ を状態変数とする 6 次系

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} \dot{\tau}_1 \\ \dot{\tau}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{v} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 + h_1 \\ g_2 + h_2 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dot{v} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (10)$$

と見なし、制御入力 $u = \ddot{x}$ により、静止倒立状態 $w_R = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ に制御する。

右辺を $w_R = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ の近傍で線形化する。 $\theta \cong 0$ より、 $\sin \theta \rightarrow \theta, \cos \theta \rightarrow 1$ として、

$$\dot{w} = Aw + Bu \quad (11)$$

となる。ここで、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$$a_1 = \frac{-3(-4gm_1 - 8gm_2)}{l_1(8m_1 + 6m_2)},$$

$$a_2 = \frac{-18gm_2}{l_1(8m_1 + 6m_2)},$$

$$a_3 = \frac{3(-6gm_1 - 12gm_2)}{l_2(8m_1 + 6m_2)},$$

$$a_4 = \frac{3(4gm_1 + 12gm_2)}{l_2(8m_1 + 6m_2)},$$

$$b_1 = \frac{-3(4m_1 + 2m_2)}{l_1(8m_1 + 6m_2)},$$

$$b_2 = \frac{3(-m_1 - 6m_2 + 3(m_1 + 2m_2))}{l_2(8m_1 + 6m_2)}. \quad (13)$$

可制御行列

$$C = (B \ AB \ \cdots \ A^5 B) \quad (14)$$

の行列式を Mathematica を用いて計算すると、

$$|C| = -\frac{59049g^6(m_1 + 2m_2)^4(l_1m_1 + l_2(2m_1 + m_2))^2}{l_1^6 l_2^6 (4m_1 + 3m_2)^6} \quad (15)$$

となった。あきらかに $|C| \neq 0$ であり、この系は可制御である。

昨年度の伊藤 [1] によれば、関節に質量の集中した二重振子は、 $l_1m_1 + l_2m_1 - l_1m_2 = 0$ のとき不可制御である。二重物理振子は、あらゆる条件下で可制御であり、顕著な差があることがわかった。

5 おわりに

本研究では、支点が水平に移動し、腕に質量のある二次元多重物理振子の運動方程式を導いた。それを用いて物理振子と二重物理振子の倒立制御について考察した。物理振子と二重物理振子は可制御であることがわかった。伊藤 [1] が行った二重振子の結果よりも、今回の二重物理振子のほうが倒立可能傾角が少し大きくなった。伊藤 [1] の振り子よりも物理振子のほうが制御が易しいと思われる。

参考文献

- [1] 伊藤瑞木, 多重倒立振子の制御, 南山大学情報理工学部卒業論文, 2015 年度 (2016).
- [2] 戸田盛和, 物理入門コース『力学』, 岩波書店, 1982.
- [3] 十河清, 和達三樹, 出口哲生, 『ゼロからの力学 1』, 岩波書店, 2005.
- [4] 十河清, 和達三樹, 出口哲生, 『ゼロからの力学 2』, 岩波書店, 2005.
- [5] 梶原宏之, 線形システム制御入門, コロナ社, 2000.