図形問題の解法の考察と実践

2013SE223 坪井雅弥
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

問題を解くにあたって，次にすべきことを発想することは感覚や経験値によるものであると言われることがしばしばあり，また必要な素養であるが教科書にはほとんど記載されていない．私はこの発想を，感覚的ではなく系統的に行う方法を提案できないかと考えている．そのためには，既に知られている解法を様々な視点から分析することが有効だと考えた．本研究の目的は，既に知られている解法を分析し，発想法と関連させることで，より適切な解法を提案・実践することである．

対象とする問題は，中学校第3学年までに学習する図形問題とする．発想法が，図形問題でより必要であると感じているからである．

本研究は，具体的に 2 つの解法を分析し，"発想する"という視点で，それぞれのよさを整理した．そして，両方のよさをもつように(2つのうちの)1つの解法を変更し，その変更した解法を，具体的な2つの問題に適用することで，その効果を確認した．本稿では，2 節で，もとになった解法，変更した解法を示し，3 節で，本研究で扱った 2 つの問題のうち，1 つの問題に対する適用例を示す．

2　解法の提案

この節では，本研究で提案する解法と，そのもとになった解法を示す．もとになった解法は，「数学難問を解ききるための五つの手順」として[1]で紹介されているものであり，その解法を以下に示す．

1- 問題文の仮定を書き込む．
2- 問題関連の公式や性質を書きだす．
3- 仮定と関連公式や性質を見比べて簡単に数字が出そうなところに数字を記入する．
4- 答えにたどり着きそうだが解くのに時間がかかる未知数(3 で値がでなかった未知数)を解く．
5 補助線を引くか 2 の公式の書きだしに戻る．

本研究は，上の解法を次のように変更した．

1- 問題の図形を作図し，問題の仮定と仮定からすぐに分かることを図に書き込む．また，2 順目からは，前の 5 で引いた補助線からすぐにわかることを書く．
2- 問題に関連する公式や性質を列挙する．
3- 2 の公式や性質に仮定の値を代入して出る値を 1 の図に記入していく．
4- 答えに関連しそうな未知数を変数で表す．また，その変数と答えの関係がわかれば書く．
5- 必要に応じて，3 の図に補助線を引く．あるいは新たな図形を作図する．補助線と答えの関係がわかれば書く．

変更点は以下のとおりである．

(1) 文言などを図形分野に限定した表現にした．(ステップ 1, 3, 5)．

(2) ステップ 3 でわかることを，ステップ 2 の公式や性質を用いてわかるものと，それ以前の情報からわかるものに分離し，後者をステップ 1 に組み入れた．結果として，ステップ 5 の補助線からすぐにわかることも，ステップ 1 に組み入れることになる．

(3) ステップ 4 は，未知数の値を求めようとする方向から，未知数と答えとの関係を明らかにする方向に変更している．そのため，未知数を変数で表すことが必要になっている．

(4) ステップ 5 の補助線は，より広い範囲の図形とした．

(5) ステップ 5 の補助線等も，(3)と同様に，答えとの関係も明記することにした．

上の変更により期待される効果は次の 4 つである．

- 各ステップで，すべきことがより明確になる(∵(1), (2))．
- 新しい情報に気付きやすくなる(∵(2), (4))．
- その操作を行う理由づけが明確になり，別の問題に応用できる(∵(3), (5))．
- 答えにある情報も，発想に活かすことができる(∵(3), (5))．

3　新解法の適用例

この節では，1 つの問題に対して，前節の新解法の適用例を 2 つ示し，前節で示した「期待される効果」を確認する．

適用した問題([2])[1]

図1のように，AB を直径とする半円 H とおうぎ形 BAC がある．AB=12cm，∠ABC=45° であり，半円 H とおうぎ形 BAC の交点を D とするとき，この交点 D と，弧 AC からなる図形 ACD の面積(図 1 の斜線部)を求めよ．

適用結果 1

[1 順目]

1 図 1 に示す．

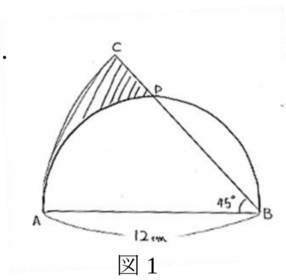

図 1

2 円，おうぎ形の面積公式，円の性質．

3 おうぎ形 BAC の面積は$12\times12\times\pi\times\frac{45}{360}=18\pi$,

半円 H の面積は$6\times6\times\pi\times\frac{180}{360}=18\pi$

4 弓形 BD(線分 BD と弧 BD で囲まれた図形)の面積を S とする．S と答えの関係は，[求めたい図形の面積]＝

---

[1] この問題は，[2]の問題から AB の値を変更し，求めるものを図形 ACD の面積に制限したものである．

[おうぎ形 ABC の面積]-[図形 ABD の面積]＝[おうぎ形 ABC の面積]-([半円 H の面積]-S)である.

5 点 D から H の中心 O に向かって補助線を引く(図 2). この補助線により, S が, おうぎ形と三角形の差として求められそうである.

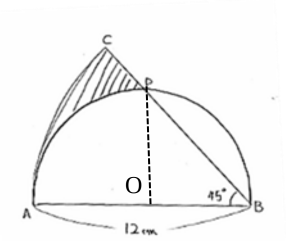

図 2

[2 順目]

1 図 3 のように, △OBD は, OB=OD, ∠OBD=45° で直角二等辺三角形である.

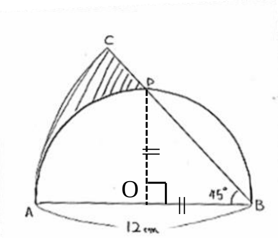

図 3

2 三角形, 円, おうぎ形の面積公式, 円の性質.

3 $S=6\times6\times\pi\times\frac{90}{360}-6\times6\times\frac{1}{2}=9\pi-18$. したがって求めたい図形 ACD の面積は $18\pi-\{18\pi-(9\pi-18)\}=9\pi-18$.

適用結果 2

[1 順目]

1 図 1 と同じ.

2 円, おうぎ形の面積公式, 円の性質, 中心角と面積の関係.

3 半円 H は中心角 180° のおうぎ形である. おうぎ形 BAC は, 半円 H と比べ, 半径が 2 倍, 中心角が$\frac{1}{4}$になっている. よって, [おうぎ形 BAC の面積]＝[半円 H の面積]$\times2\times2\times\frac{1}{4}=$[半円 H の面積]となる.

4 弓形 BD の面積を S とすると, S＝[半円 H の面積]－[図形 ABD の面積]と表せ, ステップ 2 でわかったことから, S と求めたい図形の面積が等しいことがわかる.

5 点 D から中心 O に向かって補助線を引く(図 2). この補助線により, S が, おうぎ形と三角形の差として求められそうである.

[2 順目]

1 図 3 のように, △OBD は, OB=OD, ∠OBD=45° で直角二等辺三角形である.

2 三角形, 円, おうぎ形の面積公式.

3 おうぎ形 OBD の面積は$6\times6\times\pi\times\frac{1}{4}$, △OBD の面積は$\frac{1}{2}\times6\times6=18$. したがって$S=9\pi-18$.

上の 2 つの適用例から, 変更点(2)~(5)の効果を確認しよう.

(2)は, 主に 2 順目のステップ 1 で現れる. 適用結果 1(適用結果 2 も同様)では, その 2 順目のステップ 1 で補助線 OD からわかることを記入したが, ステップ 2 の後に行うと, ステップ 2 で追加された公式や性質の情報により, 補助線 OD が目立たなくなってしまう. また, 2 順目のステップ 1 で現れた「△OBD が直角二等辺三角形」という情報が, 次のステップ 2 に生かされており, 新しい情報に気づきやすくなっているといえる.

(3)は, 主にステップ 5 以降に現れる. 適用結果 1(適用結果 2 も同様)では, 1 順目のステップ 5 で補助線 OD を記入したが, この補助線を記入した理由は S を求めるために必要なためである. 1 順目のステップ 4 で S と答えとの関係を記述しなかった場合, ステップ 5 で明確な理由によって補助線を引くことが難しくなる. 1 順目のステップ 4 で S と答えとの関係を記述したことによって, 補助線を引く理由が明確になっているといえる.

(4)は, 本稿では実際に例を挙げていないが, 立体図形における展開図や, 立体図形を切断した断面図などを, 新しく作図した方が分かりやすい場合がある.

(5)は, 主に 2 順目のステップ 1 に現れる. 適用結果 1 では, 2 順目のステップ 1 で, 補助線を引いたことでわかる, △OBD が二等辺三角形であることを記述したが, それによって△OBD の面積を求める方法がわかるようになっている. 補助線を記述したことでできる図形が直角二等辺三角形であり, S を求めるのに必要であることを示していることによって, 変数をその図形においた理由が明確になっているといえる.

おわりに

本研究では, 問題に対する解法の手順を, 中学校数学の図形分野について, 解法を分析しながら行った. 研究を行って, 図形問題が苦手な生徒に対し, 複雑な図形問題にもこの手順を使って解く筋道ができることを伝えることで, 数学的思考が養われるのではないかと感じた. 数学の面白さは, ただ解けるだけではなく, 一つの答えを導くために自分の考え方を示せるところにあると思う. 教師としてそこを気付かせることも教えることとして大切なことである. ただし, 本研究では, 実際に中学生がこの解法を活用して問題を解くことができるかを考察していないため, これから生徒を教えていくのに並行して考えを深めて行く.

参考文献

[1] イクスタ編集部:「どこから手をつければ. . . 数学の難問を解ききるための五つの手順」, https://www.ikstudie.com/articles/481

[2] 吉武瞳言:「数的推理の超プロが指南する 超高速解法のススメ! 上」, Book&Books, 東京, 2006