

「関数」の表現方法の理解を深める研究

2013SE047 稲田 丈晃

指導教員：佐々木 克巳

表 2: 23 冊のテキストにおける「関数」の表現

1 はじめに

数学において、「関数」という用語は、「 y は x の関数である」、「関数 $y=2x$ 」、「関数 $f(x)$ 」、「関数 f 」のように用いられる。しかし、この 4 つの表現は、「関数」を同じ意味で用いているのだろうか。本研究は、この疑問に答えるために、学校教育(大学も含む)において、

- ・「関数」が、どのように定義されているか
- ・「関数」が、どのように用いられているか

を調べ、「関数」の表現の理解を深めることを目的とする。

このテーマを選んだ理由は、自分が中学生の時から「関数」という言葉の曖昧さに疑問を抱いていた。また、中学校教員を志望するにあたって「関数」への深い理解や確かな知識を促す指導に活かしたいと考えたことである。

本研究では、次の 2 つを行った。

- I. 中学校数学の教科書における「関数」の表現の歴史を、[1]と現在出版されている 7 社の教科書をもとに、調べ、考察した。
- II. 大学の初年次生向けの微分積分の 23 冊のテキストにおける「微分可能」、「微分係数」、「導関数」、「2 次導関数」の定義文を比較した。

I では、「関数」の表現ごとに色分けした表をもとに、[1]の学習指導要領の改訂年度別の考察を理解し、さらに、出版社別に考察をした。

II では、23 冊のテキストから抽出した表現を表にまとめ、その表現が現れる位置(たとえば「…を導関数という」の「…」の位置)別の考察と、テキストにおける表現の統一性の考察を行った。23 冊のテキストの出版年別の数を 10 年ごとにまとめて、次の表 1 に示しておく。

表 1: 10 年ごとに取り上げたテキストの数

1960年代	3冊
1970年代	3冊
1980年代	3冊
1990年代	4冊
2000年代	5冊
2010年代	5冊

本稿では、I, II のうちの、II の「微分可能」、「微分係数」の定義文を比較した結果を述べる。2 節では、各テキストの表現を表にまとめ、3 節では、表の各列の考察をし、4 節では、表の列と列の比較を行う。

2 微分積分テキストにおける「関数」の表現の違い

この節では、23 冊のテキストの「微分可能」、「微分係数」の定義文における「関数」の表現を表 2 にまとめる。表の見方は、次のとおりである。

テキスト	微分係数の定義		
	(1)	(2)	(3)
	主題	…は $x=a$ で微分可能	…の微分係数
[A60]	函数 $f(x)$		
[B65]	関数 $y=f(x)$	$f(x)$	$f(x)$
[C66]	関数 f	f	f
[D76]	関数 $f(x)$	$f(x)$	(1)と共通
[E77]	関数 f		f
[F78]	関数 $y=f(x)$	$f(x)$	$f(x)$
[G88]	$f(x)$ を開区間 I 上の関数とし	$f(x)$	
[H88]	関数 $f(x)$	(1)と共通	$f(x)$
[I88]	関数 $f(x)$	関数 $f(x)$	$f(x)$
[J95]	関数 $y=f(x)$	関数 $y=f(x)$	
[K95]	関数 $f(x)$	$f(x)$	$f(x)$
[L99]	関数 $f(x)$	$f(x)$	$f(x)$
[M99]	関数 $y=f(x)$	$f(x)$	
[N00]	関数 $f(x)$		$f(x)$
[O01]	関数 $y=f(x)$		$f(x)$
[P03]	関数 $y=f(x)$	関数 $f(x)$	
[Q07]	関数 $y=f(x)$	$f(x)$	$f(x)$
[R08]	関数 $y=f(x)$		$f(x)$
[S13]	関数 f		
[T14]			
[U15]	関数 $f(x)$		(1)と共通
[V16]	関数 $f(x)$	$f(x)$	$f(x)$
[W16]	$y=f(x)$ を…関数とする	関数 $f(x)$	関数 $f(x)$

「テキスト」の列は、23 冊のテキストを出版年が古い順に並べている。テキストの名前は、出版年度が古い方から、[A…], [B…], …, [W…]とし、「…」の部分は出版年(西暦下 2 桁)を表している。

3 つの列(1), (2), (3)は、「微分可能」、「微分係数」の定義文の、以下に示す位置から抽出した「関数」の表現である。

- (1): 定義文の主題
- (2): 「…は $x=a$ で微分可能」の「…」の部分
- (3): 「…の微分係数」の「…」の部分

具体的に、[P03]の表現

関数 $y=f(x)$ の定義域内の点 a に対して $f'(a)=\dots$ が存在するとき関数 $f(x)$ は点 a で (または $x=a$ で) 微分可能であるといい、この極限值を点 a における微分係数とよぶ。

の場合は、

- (1) が 1 つ目の下線部
- (2) が 2 つ目の下線部
- (3) に対応する表現はない

となる。この場合(3)は空欄となる(他の列も同様である)。[C66]の表現

点 a を含む開区間で定義されている

関数 f について極限值 …が存在するとき、これを $f'(a)$ で表し a における f の微分係数といい、 f は $x=a$ で微分可能であるという。

の場合は、

- (1) が 1 つ目の下線部
- (2) が 3 つ目の下線部
- (3) が 2 つ目の下線部

となる。[H88]の表現

点 a を含む区間で定義された関数 $f(x)$ が a で微分可能とは…が存在するときという。このとき $f'(a)=\dots$ とかき $f(x)$ の $x=a$ における微分係数という。

の場合は、

- (1) が 1 つ目の下線部
- (2) は(1)と共通
- (3) が 2 つ目の下線部

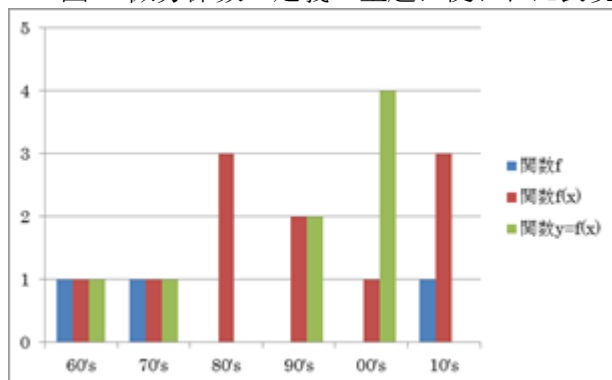
となる。このように、(2)の表現が(1)の主題になることもある。その場合は(2)の列に、「(1)と共通」と書いている(3)の表現が(1)の主題になる場合も同様である。

3 表 2 の各列の考察

この節では、表 2 の各列について気づいた点を述べる。

列(1)について述べる。[T14]以外のテキストは、「関数 f 」、「関数 $f(x)$ 」、「関数 $y=f(x)$ 」のいずれかで表現していた。しかし、年代によって、3 つのうちどれを用いるかに傾向が見られた。その傾向を図 1 のグラフにまとめる。

図 1: 微分係数の定義の主題に使われた表現



1980年代では「関数 $f(x)$ 」のみになったが、1990年代では「関数 $y=f(x)$ 」と同じ数になり、2000年代では「関数 $y=f(x)$ 」が「関数 $f(x)$ 」よりも多くなった。しかし、2010年代ではまた「関数 $f(x)$ 」が「関数 $y=f(x)$ 」よりも多くなった。つまり、年代により、多く使われる表現が変わっており、全体を通しては1つの表現に定まっていない。

「関数 f 」は、70年代までは使われていたが現在はほとんど使われていない(2010年代に「関数 f 」を用いたのは、[S13]の1冊だけであるが訳本であるためここでは除いて考える)。その理由は、高校数学でこの表現は用いられていないことからかけ離れた印象を持ち、

親近感がわからないためだと考える。

列(2)について述べる。15冊中「 $f(x)$ 」は9冊、「関数 $f(x)$ 」は4冊、「関数 $y=f(x)$ 」と「 f 」は1冊ずつであった。全体を通して「 $f(x)$ 」が多いことがわかる。

列(3)について述べる。16冊中「 $f(x)$ 」は11冊、「 f 」は2冊、「関数 $f(x)$ 」は主題(1)と共通なものを含めは3冊であり。全体を通して「 $f(x)$ 」が多いことがわかる。

4 表 2 の列の比較

この節では、表 2 の複数の列を表現の統一性の視点から比較する。したがって、本質的に比較不能である[A60], [S13], [T14], [U15]は対象から外し、残りの19冊を対象とする。また、「(1)と共通」も、ここでは無視して考える。結果として、列(1)で、「関数 $y=f(x)$ 」と表現しているテキストは統一がとれておらず、「関数 $f(x)$ 」や「関数 f 」と表現しているテキストは統一がとれている傾向がよみとれた。具体的には表 3 のとおりである。

表 3: 列ごとの表現の比較

列(1)	列(2)または列(3)			合計
	$f(x)$	関数 $f(x)$	f 関数 $y=f(x)$	
関数 $y=f(x)$	8冊	0冊	1冊	9冊
関数 $f(x)$	8冊	0冊	0冊	8冊
関数 f	0冊	2冊	0冊	2冊

以下詳細を述べる。

(i) 列(1)で、「関数 $y=f(x)$ 」と表現しているテキストが9冊([W16]を含む)で、そのうち列(2)または列(3)で、「 $f(x)$ 」と表現しているものが6冊、「関数 $f(x)$ 」と表現しているものが2冊あった。残り1冊は、「関数 $y=f(x)$ 」と表現していた。9冊のうち8冊が、列(1)で「 $y=$ 」を含み、列(3)では含まない表現をしているので、全体として、定義文の中での統一はとれていない。

(ii) 列(1)で、「関数 $f(x)$ 」と表現しているテキストが8冊([G88]を含む、[A60]と[U15]は対象外)で、そのうち列(2)および列(3)のほとんどが「 $f(x)$ 」と表現されている。そうでないところでは、[I88]の列(3)で「関数 $f(x)$ 」と表現されている。この意味で、定義文の中で統一がとれている。

(iii) 列(1)で、「関数 f 」で表現しているテキストは、[C66], [E77]であった([S13]は対象外)。どちらも列(2)および列(3)で、「 f 」と省略しており、定義文の中での統一はとれている。

参考文献

- [1] 中西正治: 学校数学における関数の定義についての史的考察: 中学校数学を中心にして, 近畿数学教育学会会誌, 2000, 13, pp. 34-45.