

剛体折り紙による構造物の作成

2012SE161 水谷 唯乃

指導教員：杉浦 洋

1 はじめに

もともとは趣味や芸術として日本で発展してきた折り紙であるが、現在では ORIGAMI として世界に広く知られている。世界に広がりつつある折り紙だが、近年では工業分野でも研究が行われ、様々な活用をされている。その代表がミウラ折りである。これは人工衛星のパネルの展開方法として考案された。この折方は縦の折り目に傾斜があり、折り目が重ならず小さく折りたたむ。また、折り畳んだ一端を引っ張ると、宇宙空間でも抵抗なく展開できる。このため、ミウラ折りは携帯地図の折り畳みにも使われている。このミウラ折りは、多数の太陽電池パネルがヒンジで結合された構造を持ち、剛体折りと呼ばれる折り方に分類される。

本稿では、剛体折り紙を、不安定トラスモデルとして解析する。また剛体折り紙作品の動きを数値シミュレーションで表現することを目標とする。

2 4 辺境界モデル

本研究では、具体的な不安定トラスモデルとして、4 辺境界モデルを取り上げる。参考文献 [1] には二種類の四辺境界モデルが紹介されている (図 1, 2)。本研究では図 1 のモデル A を詳しく調べる。

2.1 4 辺境界モデル A

図 1 は xy 平面に配置された 4 層 4 辺境界モデル A の初期状態である。 z 軸は xy 平面から垂直に手前の方向に伸び、右手系を作る。頂点に図 1 の様に番号付けする。

一般の L 層モデルの頂点を $p_i = (x_i, y_i, z_i), 1 \leq i \leq N$, とする。頂点数 $N = 4L$ である。その空間初期配置を

$$\begin{aligned} & \{p_1, p_2, \dots, p_N\} \\ &= \bigcup_{i=1}^L \{(i, 0, 0), (0, i, 0), (-i, 0, 0), (0, -i, 0)\} \quad (1) \end{aligned}$$

とする。辺の数は $m = 5 + 12(L - 1) = 12L - 7$ であり、辺の長さは不変で初期配置の長さに拘束される。

頂点 p_1, p_3 を固定し、 p_2, p_4 が xz 平面について対称になる様にモデルを動かすことを考える。モデルのパラメタは、

$$P = (p_2, p_4, p_5, \dots, p_N) = (P_1, P_2, \dots, P_{3n}) \in \mathbf{R}^n \quad (2)$$

$$n = 3N - 6 = 12L - 6 \quad (3)$$

であり、拘束条件は p_2, p_4 の対称性に関する条件と辺 $e_1 = (p_1, p_3)$ 以外の辺、 e_2, e_3, \dots, e_M に関する拘束条件

$$f_1(P) = z_2 - z_4 = 0 \quad (4)$$

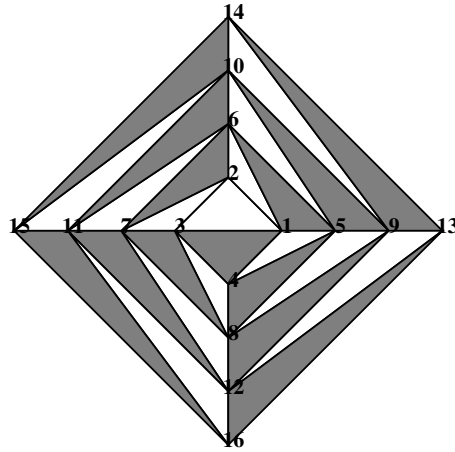


図 1 4 辺境界モデル A

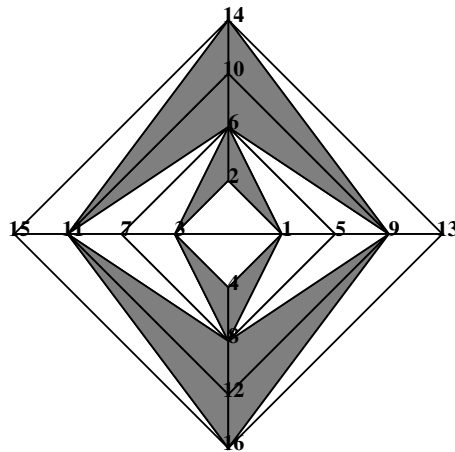


図 2 4 辺境界モデル B

$$\begin{aligned} f_k(P) &= \|p_{k1} - p_{k2}\|^2 - \lambda_k^2 \\ &= (x_{k1} - x_{k2})^2 + (y_{k1} - y_{k2})^2 + (z_{k1} - z_{k2})^2 - \lambda_k^2 \\ &= 0 \quad (2 \leq k \leq m) \end{aligned} \quad (5)$$

の合わせて m 個である。これを簡単に

$$f(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P))^T = 0 \quad (6)$$

と書く。モデルの形式的自由度は $n - m = (2L - 6) - (2L - 7) = 1$ である。

このモデルを P_2 の z 座標 $t = z_2$ をパラメタとして運動させる。

2.2 2 層の 4 辺境界モデルの折り方

初期状態の折り紙が平面のとき、Mathematica で計算すると $\dim(\ker(J(P_0))) = 4$ であった。形状変化の方向は一意に決まらない。折り紙が折れはじめて、少し折り目がつくと $\dim(\ker(J(P_0))) = 1$ となり、形状変化の方向が一意に定まることがわかった。パラメタ θ を小さくとり方程式

の解を Mathematica の非線形方程式の数値解法 FindRoot で調べた．FindRoot は与えられた初期値の周りで反復法により解を求める．初期値を乱数で与えて千回程度試み 13 個の相異なる解を得た．そのうち 5 組は，原点对称であった．結局折り目をつけたときの折り方は 8 通りしかない，8 通りのうち 3 通りは自分自身と原点对称となる．

3 初期配置におけるモデルの実質的自由度

(4), (5) の Jacobian 行列 $J(P) \in m \times n$ の初期配置 $P = P_0$ におけるランクを Mathematica の関数 MatrixRank で計算した．初期配置 P_0 の座標は整数であるから， $J(P_0)$ の成分は全て整数となる．関数 MatrixRank は整数行列のランクを正確に計算することが出来る．層の数 L と $P = P_0$ におけるパラメタ数 n ，ランク $r = \text{rank}(J)$ およびカーネルの次元 $\dim(\ker(J)) = n - r$ の値との関係を表 1 に示す．

L	2	3	4	5
n	24	36	48	60
$\text{rank}(J)$	20	28	36	44
$\dim(\ker(J))$	4	8	12	16

表 1 モデルの層数 L とパラメタ数 n ， $\text{rank}(J)$ ， $\dim(\ker(J)) = n - r$

初期配置においては， $J(P_0)$ がランク落ちするため，カーネルの次元 $\dim(\ker(J))$ が 1 より大きくなる．すなわち，パラメタ $t = z_2$ を初期値 $t = 0$ から変化させたときのモデルの運動方向が特定できない．

辺数の多い複雑な不安定トラスモデルの初期平面配置における折れ向きを指定することは非常に難しい．我々は，初期平面配置において，頂点の z 座標に規則的な微小変化を与えることにより初期配置に折れ向きを指定する方法を考案した．図 3 はその例である．図 3 で点線は谷折り，実線は山折りである．

4 4 辺境界モデル A の運動

図 3 の形状を初期値 P_0 とし， $t \geq 0$ におけるモデルの運動 $P(t)$ ($t \leq \tau$)， $P(0) = P_0$ を計算する．

$$dP = (dp_1, dp_2, \dots, dp_n)^T \in \ker(J(P(t))), \|dP\| \ll 1 \quad (7)$$

とすると

$$f(P(t) + dP) = f(P(t)) + J(P(t))dP = 0 \quad (8)$$

であるから， $t = z_2 = p_3$ より $dt = dp_3$ として， $P(t+dt) = P(t) + dP$ である．よって，右辺 $P(t) + dP$ は $\|dt\|$ が小さければ， $P(t+dt)$ のよい近似となる．これを初期値として， $z_2 = t + dt$ の制約の下で，方程式 (6) を数値的に解き， $P(t+dt)$ を求めた．解法には Mathematica の FindRoot を用いた．図 4，5 はパラメタ θ を動かしたときのモデル A の運動の様子である．

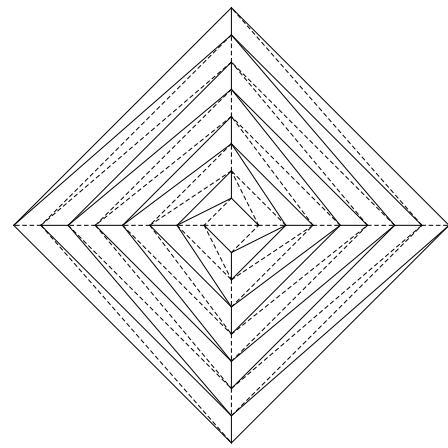


図 3

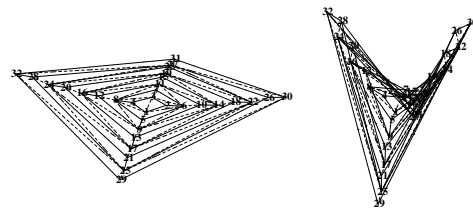


図 4

図 5

5 おわりに

剛体折り紙を不安定トラス構造と見なし，その運動を解析し，以下のことが分かった．

一般的に，平面状の折り紙は折れ向きを選択することができるため，実質的自由度が形式的自由度より大きくなる．しかし，一度折り始めると折り方を選択することができず，折り方が決まってくるため実質的自由度は，形式的自由度と一致する．

4 辺境界モデルも平面の場合実質的自由度は大きいですが，折り癖をつけると実質的自由度は形式的自由度と一致して 1 になる．

2 層 4 辺境界モデルは 5 通りの折り方しかなかった．

折り癖設定方法として頂点の高さを微量変化させる方法を考案した．高さの変化を規則的にすることにより，4 辺多層境界モデルにおいて規則的な折り癖をつけることができた．

参考文献

- [1] 『折り紙と数理とその応用』 舘知宏，野島武敏，萩原一郎，日本応用数理学会 pp. 147-158(2012)