

# コマの運動のシミュレーション

2012SE122 近藤凌

指導教員：杉浦洋

## 1 はじめに

コマは回転しているときはなぜ倒れないか、その様子についてコンピュータのシミュレーションで詳しく調べる。

コマの運動を支配しているのは剛体力学である。本研究では剛体力学について詳しく学び、それによりコマの状態を表す微分方程式を導出する。その微分方程式を数値的に解くことにより、コンピュータ上にコマの運動を再現する。

昨年山田 [3] は、支点が固定されたコマの運動を解析し、歳差運動と章動運動を観察した。本論文では、支点が固定されていなくて、床の上を動き回るコマの運動について調べる。とくに床とコマに摩擦があるとき起こると言われている「眠りゴマ」の現象を調べる。眠りゴマは、傾いて回転するコマの軸が徐々に直立し、コマが回転しながらも、眠ったように静止して見えると言う現象である。

本研究では軸の下端と床とに摩擦のあるコマの運動の微分方程式を、剛体力学により導く。得られた微分方程式を Mathematica 上で古典的 4 次ルンゲ・クッタ法により解き、コマの動きを調べる。

## 2 軸の下端が尖ったコマは摩擦で倒れる

平面の床の上を動くコマを考える。回転軸単位ベクトルを  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  とし、 $k_x > 0, k_y = 0, k_z > 0$  とする。右手系なので、 $y$  軸正の方向は紙面奥である。角運動量  $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$  は簡単のため常に  $\mathbf{k}$  と同じ方向とする。 $k_z$  が大きくなると、コマは立ち上がる。すなわち、 $L_z$  が大きくなり、 $L_x, L_y$  が大きくならなければ、コマは立ち上がる。

今、コマは上から見て反時計回りに回っている。重心を  $\mathbf{c}$ 、コマの床との接触点を  $\mathbf{b}$  とし、 $l = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$  とする。簡単のため  $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$  とする。

軸の上端は歳差運動で上から見て反時計回りに回ることを示す。 $\dot{\mathbf{L}} = (0, \dot{L}_y, 0), \dot{L}_y > 0$  を示せば良い。軸下端は床から垂直抗力  $\mathbf{F}_z = (0, 0, F_z), F_z > 0$  を受ける、これによる角運動量  $\mathbf{L}$  の変化は

$$\dot{\mathbf{L}} = (-l\mathbf{k}) \times \mathbf{F}_z = -l \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ lk_x F_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゆえ、 $\dot{L}_y = lk_x F_z > 0$  である。

さて、接触点のコマ側  $\mathbf{p}$  (軸の下端) は床と滑り、軸の上端と同様、上から見て反時計回りに回るので、対地速度は  $\dot{\mathbf{p}} = (0, \dot{p}_y, 0), \dot{p}_y < 0$ 、動摩擦力は逆向きに  $\mathbf{F}_{xy} =$

$(0, F_y, 0), F_y > 0$  である。これによる角運動量の変化は

$$\dot{\mathbf{L}} = -l \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lk_z F_y \\ 0 \\ -lk_x F_y \end{pmatrix} \quad (1)$$

すなわち、 $\dot{L}_x = lk_z F_y > 0, \dot{L}_y = 0, \dot{L}_z = -lk_x F_y < 0$  で、コマは倒れてゆく。

## 3 軸下端が丸いコマは摩擦で立ち上がる

コマが立ち上がるには、式 (1) で  $F_y < 0$  となれば良い。コマの軸下端を球面に丸めると、コマが十分高速で回転しているなら、接触点  $\mathbf{p}$  は軸の運動に抗して床面に対し紙面奥方向に運動し、対地速度が  $\dot{\mathbf{p}} = (0, \dot{p}_y, 0), \dot{p}_y > 0$  となる。動摩擦力は逆向きに  $\mathbf{F}_{xy} = (0, F_y, 0), F_y < 0$  ゆえ  $\dot{L}_x = lk_z F_y > 0, \dot{L}_y = 0, \dot{L}_z = -lk_x F_y < 0$  となり、コマは立ち上がる。

## 4 眠りゴマの運動方程式

重力加速度を  $g = 9.8[m/s^2]$  とする。コマの質量を  $m$  とする。直立したコマの重心高を  $l$ 、重心を中心とする主軸慣性モーメント  $I_x = I_y = I_{xy}, I_z$  は、直立したコマの  $x, y, z$  軸方向慣性モーメントである。コマの支点は床の上を動摩擦係数  $\mu_1$  で滑るものとする。

コマの支点:  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, 0), \mathbf{b}_{xy} = (b_x, b_y)$ ,

コマの軸ベクトル:  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ ,

重心周りの角速度:  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ,

重力ベクトル:  $\mathbf{G} = (0, 0, -mg)$ ,

床の抗力:  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ ,

重心周りの慣性テンソル:  $I(\mathbf{k})$ ,

3 節に基づき、コマの先端を半径  $R$  の球に丸めたコマを考える。直立時の重心高を  $l$  とする。球の中心とコマの重心  $\mathbf{c}$  との距離は

$$l_R = l - R \quad (2)$$

重心の座標は

$$\mathbf{c} = (b_x, b_y, R) + l_R \mathbf{k} \quad (3)$$

となる。重心の並進運動方程式は、

$$m(\ddot{\mathbf{b}} + l_R \ddot{\mathbf{k}}) = m\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{G} + \mathbf{F} \quad (4)$$

重心周りの角運動量  $\mathbf{L}$  に関する方程式は、重心に対する接点の相対位置を  $\mathbf{b}_c$  として、

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{b}_c \times \mathbf{F}, \quad \mathbf{b}_c = \mathbf{b} - \mathbf{c} \quad (5)$$

接地点  $\mathbf{b}$  のコマ側を  $\mathbf{p}$  とすると、 $\mathbf{p}$  は  $\mathbf{c}$  と共に並進運動し、 $\mathbf{c}$  の周りを角速度  $\boldsymbol{\omega}$  で回転するので、

$$\dot{\mathbf{p}} = (\dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z) = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times (0, 0, R) \quad (6)$$

式 (3) の  $z$  成分を比較して  $ml_R\ddot{k}_z = -mg + F_z$  より,

$$F_z = mg + ml_R\ddot{k}_z \quad (7)$$

$\mathbf{p}_{xy} = (p_x, p_y)$  とすると, 動摩擦による抗力は

$$(F_x, F_y) = -\mu_1 F_z \frac{\dot{\mathbf{p}}_{xy}}{\|\dot{\mathbf{p}}_{xy}\|} \quad (8)$$

である. 式 (4), (5), (7), (8) がコマの運動方程式である.

運動方程式から, 抗力  $\mathbf{F}$  を消去して, 微分方程式の標準形

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (b_x, b_y, v_x, v_y, k_x, k_y, k_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad (9)$$

を導いた.

## 5 精密コマの解説

N E X T 岡谷市新世代経営者研究会の精密コマを購入した. 精密コマの設計は図 4.1 であり, 材質は, 本体が黄銅 C3604 (比重  $8.50[g/cm^3]$ ), 軸棒が鋼 SUS303 (比重  $7.90[g/cm^3]$ ) が使用されている.

図 1 の設計図を元に公式にしたがって計算したところ, コ

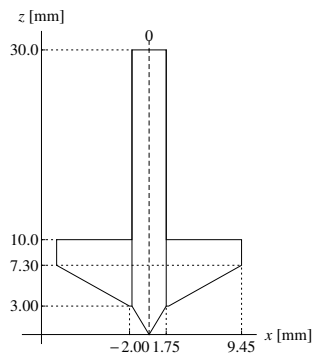


図 1 精密コマの設計図.1

マの質量は  $12.3[g]$ , 重心高は  $9.09[mm]$ , 主軸慣性モーメントが  $I_{xy} = 4.89 \times 10^{-7}$ ,  $I_z = 4.056 \times 10^{-7}$  となった.

## 6 数値実験

微分方程式 (9) を古典的 4 次ルンゲ・クッタ法で解いた. [例 1] 解の精度を確かめるため動摩擦係数  $\mu_1 = 0$  のときの力学的エネルギーの保存を観察する.

コマの軸の下端は半径  $R = 1[mm]$  に丸めた. 初期値  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$  を

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{xy} &= (0, 0), \quad \mathbf{v}_{xy} = (0, 0), \\ \mathbf{k} &= (0, \sin \theta, \cos \theta), \quad \theta = 5^\circ, \quad \boldsymbol{\omega} = 100 \times 2\pi \mathbf{k} \end{aligned}$$

で設定し, 時間ステップ  $dt = \frac{1}{1000}$  で  $t \in [0, 5]$  において方程式を解いた. コマは 1 秒に 100 回転するので, 1 回転あたりのルンゲ・クッタ法のステップ数は 10 である. 力学的エネルギーの変化を図 2 に示す. 力学的エネルギーは誤差範囲で保存されている.

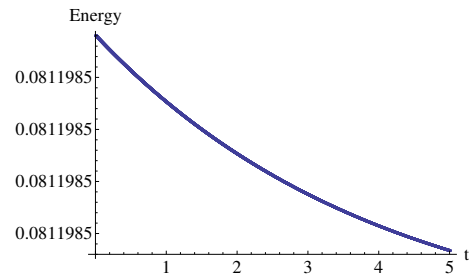


図 2 動摩擦係数  $\mu_1 = 0$  のときのエネルギー

[例 2] 同じコマを動摩擦係数  $\mu_1 = 0.1$  として観察する.

初期値を例 1 と同じに設定し, 時間ステップ  $dt = \frac{1}{1000}$  で  $t \in [0, 20]$  において方程式を解いた. コマの軸の傾きの変化 (図 3) をグラフに表した. コマの軸は時間とともに直立 ( $\theta = 0$ ) に近づいた.

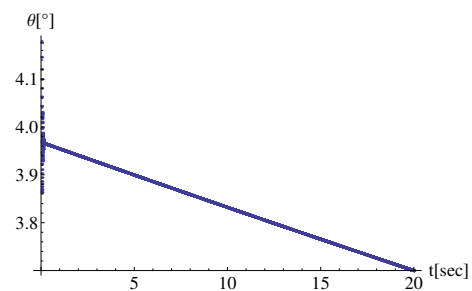


図 3 動摩擦係数  $\mu_1 = 0.1$  のときのコマの傾き

## 7 おわりに

本研究では, 軸が床の上で自由に運動し, 床と軸の下端に摩擦力の働くコマの運動をシミュレーションすることができた. 力学的解析の結果, 先の尖ったコマでは, 摩擦力がコマを引き起こす力を発生しない. 先を丸めたコマでは, 摩擦力がコマを引き起こす力を発生する. このことがシミュレーションでも確認できた.

シミュレーションによれば, コマが直立するためには, 長い時間が必要であった. 20 秒でたった  $0.2^\circ$  起きただけであった. コマの重心位置, 主軸慣性モーメントなどを変化させてどのようなコマが直立しやすいか調べることは, 今後の課題である.

また, 逆立ちゴマなどコマに関する他の様々な現象をシミュレーションすることも興味深い課題である.

## 参考文献

- [1] 戸田盛和:『力学「物理入門コース 1」』. 岩波書店, 東京, 2012.
- [2] 十河清・和達三樹・出口哲生:『ゼロからの力学』. 岩波書店, 東京, 2013.
- [3] 山田竜也, 南山大学情報理工学部卒業論文, 2014 年度 (2015)