第一不完全性定理における再帰的表現の考察

2012SE242 鈴村郁弥
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

卒業研究の題材を探しているときに[1]に書かれた「証明不可能なことの証明」という題字が目に止まり，ゲーデルの不完全性定理に興味を持った．そしてその一部である第一不完全性定理の再帰的表現の理解に重きを置き本研究を行った．

本研究の目的は，[1]にしたがって，第一不完全性定理の証明の概観を理解し，その手順に含まれる再帰的表現を考察することである．結果，卒業論文は以下の 3 つで構成した．第 1 に，第一不完全性定理の証明の概観の記述，第 2 に不完全性定理において使われる体系 P の定義と性質の説明，最後は本稿でも取り扱う本研究の中心となる再帰的表現の解説である．とくに，最後の再帰的表現の解説は，具体例を通して行った．

本稿では，研究の核となった，再帰的表現についての解説の一部を示す．

2 再帰的表現

この節では，第一不完全性定理の証明で使用される再帰的表現の導入部分を，具体例を用いて解説する．

最初に「再帰的定義」，「再帰的関数」の説明と，関連する 4 つ定理を[1]から引用しておく．ただし用いる記号などは適宜変更する．

再帰的定義

数論的関数 $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が 2 つの数論的関数 $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ と $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ から<u>再帰的に定義</u>されるというのは任意の $x_2, \ldots, x_n, k$ に対して，以下が成り立つことである

$$\phi(0, x_2, \ldots, x_n) = \phi(x_2, \ldots, x_n)$$

$$\phi(k+1, x_2, \ldots, x_n) = \mu(k, \phi(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$$

再帰的関数

数論的関数 ϕ が<u>再帰的</u>であるというのは，数論的関数の有限列 $\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_m (=\phi)$ が存在して，構成要素となる各関数 ϕ_k は，定数もしくは後者関数 x＋1 であるか，その要素よりも前に現れる関数の合成，もしくはそれよりまえの 2 つの関数から再帰的に定義されることである．再帰的関数 ϕ の<u>次数</u>は，ϕ を定義する関数列 $\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_i (=\phi)$ の最小の i である．自然数の関係 $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が<u>再帰的</u>であるとは，再帰的関数 $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が存在して，任意の $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，以下が成り立つことである．

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim [\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0]$$

4 つの定理

Ⅰ．再帰的関数(関係)の変項に再帰的関数を代入して得られる関数(関係)は，再帰的である．再帰的関数から再帰的定義の 2 つの等式(2)によって再帰的に定義される関数は再帰的である．

II. R と S が再帰的関係であるのならば，$\overline{R}$(R の否定)や R∨S(R または S)も(そして R&S，(R かつ S)も)そうである．

III. 関数 $\phi(p)$，$\phi(q)$ が再帰的関数であれば，$\phi(p) = \phi(q)$ は再帰的関係である．

IV. 関数 $\phi(p)$ と関係 R(x,q)が再帰的であれば，以下で定義される関係 S，T も再帰的であり，

$$S(p, q) \sim (Ex)[x \leq \phi(p) \& R(x, q)]$$

(ある $x \leq \phi(p)$ が存在して R(x,q))

$$T(p, q) \sim (x)[x \leq \phi(p) \rightarrow R(x, q)]$$

(すべての $x \leq \phi(p)$ に対して R(x,q))

さらに，以下で定義される関数 ψ もそうである．

$$\psi(p, q) \sim \varepsilon x[x \leq \phi(p) \& R(x, q)]$$

ただし，$\varepsilon xF(x)$ は F(x)を成立させる最小の数 x のことで，もしそのような数がなければ 0 とする．

再帰的表現と第一不完全性定理の証明との関係はおおまかには次のとおりである．

・第一不完全性定理の証明には，関数 Bew(証明可能)が重要な役割を果たす．

・[1]では，Bew を，45 個の再帰的関数(または関係)を用いて表現している．

以下では，上の 45 個のうち 8 個の関数に対し，その[1]における定義と日本語の説明を引用し，更に 8 個のうちの 5 個については，具体的な値に対する関数の値を計算する(卒業論文では 23 個を扱った)．ただし，ここでは，関数 $x + y$，$x \cdot y$，x^y と関係 $x < y$ が再帰的であることを前提としている．

再帰的関数 1. x/y ： x は y で割り切れる
再帰的関数 2. Prim(x) ： x は素数である
再帰的関数 4. n! ： 階乗

再帰的関数 3.

$$0 \, \mathrm{Pr} \, x \equiv 0$$

$$(n+1) \, \mathrm{Pr} \, x \equiv \varepsilon y[y \leq x \& \mathrm{Prim}(y) \& x/y \& y > n \, \mathrm{Pr} \, x]$$

n Pr x は x の約数となる(大きさの順で)n 番目の素数

具体例. x=6 の場合を考えると，日本語表現から 6 の素因数は 2，3 であることため，

$$1 \Pr 6 \equiv 2$$
$$2 \Pr 6 \equiv 3$$
$$3 \Pr 6 \equiv 0$$
$$\vdots$$

となる．$1 \Pr 6 \equiv 2$から$2 \Pr 6 \equiv 3$となることを定義にもとづいて示すと次のようになる．

$$2 \Pr 6 \equiv \varepsilon y[y \leq 6 \& \mathrm{Prim}(y) \& 6/y \& y > 1 \Pr 6]$$
$$\equiv \varepsilon y[y \leq 6 \& \mathrm{Prim}(y) \& 6/y \& y > 2]$$

$2 < y \leq 6$となる素数で 6 を割り切る数は y＝3 なので

$$2 \Pr 6 \equiv 3$$

同様に，$2 \Pr 6 \equiv 3$から$3 \Pr 6 \equiv 0$となることを示すと次のようになる．

$$3 \Pr 6 \equiv \varepsilon y[y \leq 6 \& \mathrm{Prim}(y) \& 6/y \& y > 2 \Pr 6]$$
$$\equiv \varepsilon y[y \leq 6 \& \mathrm{Prim}(y) \& 6/y \& y > 3]$$

$3 < y \leq 6$となる 6 の素因数は存在しないためεの定義より

$$3 \Pr 6 \equiv 0$$

再帰的関数 5.

$$\Pr(0) \equiv 0$$
$$\Pr(n+1) \equiv \varepsilon y[y \leq \{\Pr(n)\}! + 1 \& \mathrm{Prim}(y) \& y > \Pr(n)]$$

Pr(n)は(大きさの順で)n 番目の素数

具体例. Pr(1)を考えると

$$\Pr(1) \equiv \varepsilon y[y \leq \{\Pr(0)\}! + 1 \& \mathrm{Prim}(y) \& y > \Pr(0)]$$
$$\equiv \varepsilon y[y \leq 2 \& \mathrm{Prim}(y) \& y > 0]$$

よって，Pr(1)は，$0 < y \leq 2$となる素数 y の中で最小の数なので 2 である．つまり，Pr(1)=2 となる．

再帰的関数 6.

$$n \, \mathrm{Gl} \, x \equiv \varepsilon y[y \leq x \& x/(n \Pr x)^y \& \overline{x/(n \Pr x)^{y+1}}]$$

n Gl x は数 x に対応付けられる数列の n 番目の数(n は 0 より大きく，この数列の長さを超えない)．

具体例. x に対応付けられる数列とは，x を素因数分解して

$$x = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot \ldots \cdot {P_n}^{a_n}$$

と表したときの，数列$a_1, a_2, \ldots a_n$のことである．ただしP_iは素数を小さいほうから 2,3,5,⋯と並べたときの i 番目の数(つまり i 番目の素数)でP_nは x の素因数で最大のものである．x=360 のときは

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

だから 360 に対応付けられる数列は 3，2，1 である．

上記を用いて数列 2 Gl 360 を考える．まず，日本語の解説で考える．すると，2 Gl 360 は数列 3，2，1 の 2 番目の数 2 である．次に，定義にもとづいて計算する．すると，

$$2 \, \mathrm{Gl} \, 360 \equiv \varepsilon y[y \leq 360 \& 360/(2 \Pr 360)^y \& \overline{360/(2 \Pr 360)^{y+1}}]$$
$$\equiv \varepsilon y[y \leq 360 \& 360/3^y \& \overline{360/3^{y+1}}]$$

となる．すなわち，2 Gl 360 は，$y \leq 360$，$360/3^y$(つまり y=1,2)，$\overline{360/3^{y+1}}$(つまり $y \neq 1$)をすべて満たす数のうち最小の数なので 2 となる．

再帰的関数 7.

$$l(x) \equiv \varepsilon y[y \leq x \& y \Pr x > 0 \& (y+1) \Pr x = 0]$$

l(x)は数 x に対応付けられる数列の長さ

具体例. l(360)を考える．まず，日本語の解説で考える．再帰的関数 6 でも示したとおり 360 に対応付けられる数列は 3，2，1 でこの数列の長さは 3 なので l(360)=3 となる，次に，定義にもとづいて計算する．すると，

$$l(360) \equiv \varepsilon y[y \leq 360 \& y \Pr 360 > 0 \& (y+1) \Pr 360 = 0]$$

となる．すなわち，l(360) は，$y \leq 360$，$y \Pr 360 > 0$(つまり $y = 1,2,3$)，$(y+1) \Pr 360 = 0$(つまり $y \geq 3$)をすべて満たす数のうち最小の数なので 3 となる．

再帰的関数 8.

$$x * y \equiv \varepsilon z\{z \leq [\Pr(l(x) + l(y))]^{x+y} \&$$
$$(n)[n \leq l(x) \rightarrow n \, \mathrm{Gl} \, z = n \, \mathrm{Gl} \, x] \&$$
$$(n)[0 < n \leq l(y) \rightarrow (n + l(x)) \, \mathrm{Gl} \, z = n \, \mathrm{Gl} \, y]\}$$

$x * y$ は二つの有限数列 x と y を連結する演算に対応する．

具体例. $x = 2^3 3^5$，$y = 2^2 3^4$のときを考える．まず，日本語の解説で考える．有限数列 x とは，列 3,5 のことで，有限数列 y とは列 2,4 のことと解釈する．連結した数列は 3,5,2,4 で，数$x * y$ は$2^3 3^5 5^2 7^4$となる．このとき y は$5^2 7^4$に置き換わっているととらえることもできる．次に，定義にもとづいて計算すると，定義の 1 行目は

$$2^3 3^5 * 2^2 3^4 \equiv \varepsilon z\{z \leq [\Pr(2+2)]^{2^3 3^5 + 2^2 3^4} \& \cdots\}$$
$$\equiv \varepsilon z\{z \leq 7^{(2^3 3^5 + 2^2 3^4)} \& \cdots\}$$

となる．この計算から

$$z \leq 7^{(2^3 3^5 + 2^2 3^4)} \qquad (*)$$

であることがわかる．定義の 2，3 行目は

$$(n)[n \leq 2 \rightarrow n \, \mathrm{Gl} \, z = n \, \mathrm{Gl} \, x]$$
$$(n)[0 < n \leq 2 \rightarrow (n+2) \ \mathrm{Gl} \, z = n \, \mathrm{Gl} \, y]$$

となる．それぞれは，

・z に対応付けられる数列の 1，2 番目は，x に対応付けられる数列の 1,2 番目に等しい．

・z に対応付けられる数列の 3，4 番目は，y に対応付けられる数列の 1,2 番目に等しい．

を表す．このことから，$x * y$ は上の二つと(*)を満たす最小の数 z で，$x * y = 2^3 3^5 5^2 7^4$となる．ここで，この数が(*) を満たすことは $2^3 3^5 2^2 3^4 \leq 7^{(3+5+2+4)} \leq 7^{(2^{3+5} + 2^{2+4})} = 7^{(2^3 2^5 + 2^2 2^4)} \leq 7^{(2^3 3^5 + 2^2 3^4)}$からわかる．

参考文献

[1] 田中一之：ゲーデルに挑む， 証明不可能なことの証明，東京大学出版会，東京，2012