ゲーデル・パズルの数理的考察

2012SE175 中野 陽
指導教員: 佐々木克巳

1 はじめに

私は, 1 年次の「情報数学」で真理値表に興味を持ち, 数理論理学を研究していく過程で, ゲーデル・パズルの問題について, 真理値表を用いて解いてみたいと思った.

本研究の目的は, スマリヤン[2]のゲーデル・パズルに対して, 真理値表を用いた解法を考察することである. 具体的には[2]第 1 部の第 2 章「騎士と悪漢の島」の 5 問, 第 3 章「不思議なムジカ島」の 3 問, 第 4 章「メタパズル 4 題」の 3 問, 第 5 章「認められた騎士と悪漢」の 5 問に対して, 真理値表を用いた解を与えた.

本稿では, [2]の第 2 章「騎士と悪漢の島」の 9 問の中から 2 問を抽出し, 真理値表を用いた解を与える.

以下では, 論理記号として¬(～でない), ≡(同値)の 2 つを用いる. また, ○, ×はそれぞれ真理値「真」, 「偽」を意味する.

2 騎士と悪漢の島

この節では, [2]の第 2 章「騎士と悪漢の島」の Q12(本稿では問題 1)と Q13(本稿では問題 2)に対し, 真理値表を用いた解を与える. この問題は騎士と悪漢の島と呼ばれる島に関するものであり, その前提条件を要約したものが以下である.

前提条件 1([2])

(1)この島の住民は騎士か悪漢のいずれかである.

(2)騎士は常に本当のことを発言する.

(3)悪漢は常に嘘をつく(偽のことを発言する).

上記の条件からこの島の住民 X と発言 P に対して, 次の性質が成立する(証明は[1]p.20[ノート 1.4]と同様にできる).

性質 1

X が P と発言した⇒「X が騎士である≡P」

また, 以下では, 住民 X に対し, 「X が騎士である」を K(X), 「X が有罪である」を G(X), 「X が王である」を R(X) と表現する.

問題 1

私は, ある裁判に立ち会った. 悪事が行われ, 3 人の容疑者 A, B, C が裁判にかけられた. 3 人は次のように発言した.

A「私は有罪だ」

B「私は, ほかの二人の少なくとも一人と同種だ」

C「私たちは三人全員が同種だ」

さて, 有罪なのは誰か.

真理値表を用いた解

まず, A の発言に着目する. 性質 1 より K(A)≡G(A)である. この真理値表を表 1.1 に示す.

表 1.1:A の発言について

K(A)	G(A)	K(A)	≡	G(A)
○	○		○	
○	×		×	
×	○		×	
×	×		○	

表 1.1 より A が騎士のとき「A は有罪」であり, A が悪漢のとき「A は無罪」である.

次に B の発言に着目する. 性質 1 より K(B)≡「ほかの二人の少なくとも一人と同種」である. この真理値表を表 1.2 に示す.

表 1.2:B の発言について

K(A)	K(B)	K(C)	K(B)	≡	ほかの二人の少なくとも一人と同種
○	○	○		○	○
○	○	×		○	○
○	×	○		○	×
○	×	×		×	○
×	○	○		○	○
×	○	×		×	×
×	×	○		×	○
×	×	×		×	○

最後に, C の発言に着目する. 性質 1 より K(C)≡「三人全員が同種」である. この真理値表を表 1.3 に示す. ただし, 表 1.2 との比較を容易にするため, 表 1.2 と同じ形で示す.

表 1.3:C の発言について

K(A)	K(B)	K(C)	K(C)	≡	三人全員が同種
○	○	○		○	○
○	○	×		○	×
○	×	○		×	×
○	×	×		○	×
×	○	○		×	×
×	○	×		○	×
×	×	○		×	×
×	×	×		×	○

表 1.2, 表 1.3 の 2 つの表における同値性を示す文はどちらも成立するから, 各表において同値性が○の行(塗

りつぶしてある行)の共通部分，すなわち 1, 2 行目が解となる．故に，「A が騎士」，「B が騎士」であることがわかった．

表 1.1 の結果とあわせると，「A が騎士」であるため「A が有罪」であることがわかった．

問題 2

この島では，女性もそれぞれ常に嘘をつくか，常に本当のことを言うかのいずれかである．男性は，これまでどおり，騎士か悪漢のいずれかである．私は，アーク夫妻，ボグ夫妻，コグ夫妻という 3 組の夫婦を紹介された．この中の一組は，この島の王と女王である．また，どの夫婦もともに嘘つきであることはないと分かっている．この 3 組の夫婦が次のように発言した．

アーク氏「私は王ではない」

アーク夫人「王はイタリア生まれだ」

ボグ氏「アーク氏は王ではない」

ボグ夫人「王は実際にはスペイン生まれだ」

コグ氏「私は王ではない」

コグ夫人「ボグ氏は王だ」

さて，王は誰か．

真理値表を用いた解

アーク氏を A，アーク夫人を A 夫人，ボグ氏を B，ボグ夫人を B 夫人，コグ氏を C，コグ夫人を C 夫人とする．

コグ夫婦の発言は，ともに王が誰であるかについての発言であり，真理値表を作成する際に多くの情報が得られるため，まずはコグ夫婦の発言に着目する．また，夫婦でともに嘘つきであることはないという条件があるため，夫婦それぞれの発言を一つの真理値表にまとめ，そこでは夫婦どちらも悪漢である可能性を対象から除外する．性質 1 より K(C)≡￢R(C), K(C 夫人)≡R(B)である．この真理値表を表 2.1 に示す．

表 2.1：コグ夫婦の発言について

K(C)	※	王	K(C)	≡	￢R(C)	※	≡	R(B)
○	○	A		○	○		×	×
○	○	B		○	○		○	○
○	○	C		×	×		×	×
○	×	A		○	○		○	×
○	×	B		○	○		×	○
○	×	C		×	×		○	×
×	○	A		×	○		×	×
×	○	B		×	○		○	○
×	○	C		○	×		×	×

(※：K(C 夫人))

表 2.1 と，その 2 つの同値性が真であることから，可能性を 2, 4 行目に絞ることができた．つまり，「コグ氏が騎士」であり，「コグ夫人が騎士」のとき「ボグ氏が王」，「コグ夫人が悪漢」のとき「アーク氏が王」である．

次に，アーク氏とボグ氏の発言に着目する．性質 1 より K(A)≡￢R(A), K(B)≡￢R(A)である．この真理値表を表 2.2 に示す．ただし，表 2.1 よりコグ氏が王であることはないため，その可能性を表 2.2 の対象から除外している．

表 2.2：アーク氏，ボグ氏の発言について

K(A)	K(B)	王	K(A)	≡	￢R(A)	K(B)	≡	￢R(A)
○	○	A		×	×		×	×
○	○	B		○	○		○	○
○	×	A		×	×		○	×
○	×	B		○	○		×	○
×	○	A		○	×		×	×
×	○	B		×	○		○	○
×	×	A		○	×		○	×
×	×	B		×	○		×	○

表 2.2 と，その 2 つの同値性が真であることから，可能性を 2, 7 行目に絞ることができた．つまり，アーク氏とボグ氏はどちらも騎士か，どちらも悪漢で，前者のとき「ボグ氏が王」，後者のとき「アーク氏が王」である．

表 2.2 の 2, 7 行目に対して，アーク夫人，ボグ夫人の情報，つまり K(A 夫人), K(B 夫人)の列を追加した真理値表を 2.3 に示す．ただし，問題の条件より，夫婦ともに嘘つきとなる可能性を除外している．

表 2.3：アーク夫人，ボグ夫人について

K(A)	K(B)	王	K(A 夫人)	K(B 夫人)
○	○	B	○	○
○	○	B	○	×
○	○	B	×	○
○	○	B	×	×
×	×	A	○	○

王の出身地について異なる発言をしているアーク夫人とボグ夫人がともに騎士となることは矛盾しているので 2, 3, 4 行目が解となる．故に「アーク氏が騎士」，「ボグ氏が騎士」，「ボグ氏が王」であることがわかった．

結果をまとめると，「ボグ氏が王」である．

3　おわりに

本研究では，[2]の問題に対して真理値表を用いた解を与えることで，解を形式的に求めることができた．[2]の解の多くは仮定を必要とするが，真理値表を用いた解では仮定をする必要がないため，真理値表を作ることさえできれば，情報が整理されていて結論が導きやすい．

参考文献

[1] 小野　寛晰：「情報科学における論理」，日本評論社，東京，1994

[2] レイモンド・M・スマリヤン：「スマリヤンのゲーデル・パズル　論理パズルから不完全性定理へ」，日本評論社，東京，2014