

人狼パズルの数理的考察

2012SE131 倉橋 眞浩

指導教員: 佐々木 克巳

1 はじめに

スマリヤン[2]の第7章「人狼の避け方などの有用な助言」において、住民の発言から人狼を見つける論理パズルが紹介されている。これらのパズルを、真理値表を用いて解いているうちに、その問題の逆、すなわち、人狼を見つけるためには、どんな発言があればよいか、を考えてみたいと思った。

本研究の目的は、ある条件のもとで、人狼は誰か、などの知りたい情報を得るために有効な質問を考察することである。卒業論文の第2章では、[2]の問題に対して、真理値表を用いた解を与えた。第3章では、ある情報を得るために住民にする質問を考察した。ここでは、第3章を取り上げる。

2 質問の考察

この節では、ある条件のもとで、人狼は誰か、などの知りたい情報を得るために住民にどのような質問をすればよいか、を考える。具体的には次の問題を考える。

問題

その森の住民2人をA,Bとする。この2人のうちちょうど1人が人狼である。あなたはAに質問を3回することができる。また、Aは質問に対しては「はい」または「いいえ」のいずれかで回答する。このとき、「人狼は誰か」、「Aは騎士か」、「Bは騎士か」の3つを知るための3回の質問の組を全て求めよ。

ただし、すべての住民は騎士か悪漢のどちらかであったとする(騎士はいつも本当のことを言い、悪漢はいつも嘘をつく)。

この問題における質問は、真理値が判定できる文Xに対して、「Xであるか?」の形に限定する。この文を質問Xと呼ぶことにする。

本研究では、質問をその日本語表現が簡潔なものに限定し、その限定した範囲では、本質的には、全部で59組の質問があることを示した。以下、その詳細を示す。

まず、次の2つの補助定理を示す(証明は卒業論文に示したが、ここでは省略する)。補助定理2によって、我々の目標は、補助定理2の(2)を満たす。質問X,Y,Zのうち、日本語表現が簡潔なものを求めることで達成できることになる。

補助定理1

- (1) 質問「Xであるか?」に対するAの回答が「はい」 \Leftrightarrow 「Aが騎士 \equiv X」は真
- (2) 質問「Xであるか?」に対するAの回答が「いいえ」 \Leftrightarrow 「Aが騎士 \equiv X」は偽

補助定理2

Aへの3つの質問をX,Y,Zとする。このとき、次の2条件は同値である。

- (1) 3つの質問によって、「Aが騎士」、「Bが騎士」、「Aは人狼」の真理値がわかる。
- (2) 表1において、「Aが騎士 \equiv X」、「Aが騎士 \equiv Y」、「Aが騎士 \equiv Z」の真理値の組が各行で互いに異なる。

表1:Aにする質問を考察するための真理値表

	Aが騎士	Bが騎士	人狼	Aが騎士 \equiv X	Aが騎士 \equiv Y	Aが騎士 \equiv Z
1	○	○	A			
2	○	×	A			
3	×	○	A			
4	×	×	A			
5	○	○	B			
6	○	×	B			
7	×	○	B			
8	×	×	B			

次に補助定理2の(2)を満たす、質問X,Y,Zを絞り込むための補助定理を示す。

補助定理3

質問X,Y,Zが補助定理2の(2)を満たすとすると、このとき、「Aが騎士 \equiv X」、「Aが騎士 \equiv Y」、「Aが騎士 \equiv Z」の各同値性は次を満たす。

表1の8行のうちちょうど4行で真 (*)

解説

たとえば、「Aが騎士 \equiv X」が5行で真だとすると、YとZをどのようにとっても3つの同値性の真理値が等しい行が2つ以上ある。したがって、補助定理2の(2)の条件を満たさない。

逆に、上記の条件(*)を満たす質問をする。回答が「はい」であっても、「いいえ」であっても、補助定理1によって、可能性が4行に絞りこまれる。さらに、残りの2つの質問を適切に選ぶことで、8通り \rightarrow 4通り \rightarrow 2通り \rightarrow 1通りのように、1行に絞りこまれ、知りたい3つの真理値を得ることができる。

さて、補助定理3の(*)を見たす真理値のパターンは、 $8C4 = 70$ 通り

である。この70通りは表2の35通りと、その否定形である。補助定理2の(2)を満たす質問Xは「Aが騎士 \equiv X」の真理値がこの70通りのいずれかになるものに絞られる。

次に質問Xの表現によって質問を絞り込む。表2から質問Xの真理値のパターンを求めた結果を表3に示す。

X の真理値のパターンの候補は表 3 の 35 通りと、その否定形となる。

表 2:(*)を満たす真理値のパターン

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)
1.	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2.	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×
3.	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	○	○	○	○
4.	○	×	×	×	×	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	○	○	○
5.	×	○	×	×	×	○	×	×	×	○	○	○	×	×	×	○	×	×
6.	×	×	○	×	×	×	○	×	×	○	×	×	○	○	×	×	○	×
7.	×	×	×	○	×	×	×	○	×	×	○	×	×	○	×	×	○	×
8.	×	×	×	×	○	×	×	×	○	×	×	○	×	×	○	×	×	×

	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)	(31)	(32)	(33)	(34)	(35)
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
○	×	×	×	×	×	×	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×
×	○	○	○	○	×	×	×	○	○	○	×	×	×	○	○	○	×
×	×	×	○	×	×	×	○	×	○	×	○	○	×	○	×	○	×
○	×	×	○	×	○	○	×	×	○	×	○	○	×	○	○	○	○

表 3: 2 から得られる質問 X の真理値

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)
1.	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2.	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×
3.	×	×	×	×	×	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	
4.	×	○	○	○	○	×	×	×	×	○	○	○	○	○	○	×	×	
5.	×	○	×	×	×	○	×	×	×	○	○	○	×	×	×	○	×	
6.	×	×	○	×	×	×	○	×	×	○	×	×	○	○	×	×	○	
7.	○	○	○	×	○	○	○	×	○	○	×	○	×	○	×	○	×	
8.	○	○	○	○	×	○	○	○	×	○	○	×	○	×	○	○	×	

	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)	(31)	(32)	(33)	(34)	(35)
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
×	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
×	○	○	×	×	○	×	×	○	×	○	×	×	○	○	×	×	○
○	○	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×
×	○	○	○	×	○	×	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×

この 35 個の表現から、簡潔な質問を抜粋する。「簡潔な表現」の基準は、その表現が次の(i)~(iv)のいずれかであることである。

(i) 次の表現のいずれか

「□が騎士」、「□が悪漢」、「□が人狼」、「□が騎士で人狼」、「□が悪漢で人狼」、「騎士である方が人狼」、「悪漢である方が人狼」、「A、B ともに騎士」、「A、B ともに悪漢」、「A、B ともに人狼」、「A と B が同種」、「A と B が異種」、「生きていますか」

(ii) (i)のうち 2 つを「かつ」でつないだ表現

(iii) (i)のうち 2 つを「または」でつないだ表現

(iv) (i), (ii), (iii)の否定表現

この基準より抜粋される質問は(2), (4), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (20), (21), (25), (26), (28), (31), (32), (34)の 16 個(否定形をあわせると 32 個)である。この 16 個の日本語表現は以下のとおりである。

- (2)「A と B は異種であり悪漢である方が人狼」でない
- (4)A が騎士で人狼, または, A, B ともに悪漢
- (10)あなたは生きていますか
- (11)「A と B は異種であり B が人狼」でない
- (12)「B が悪漢で人狼」でない
- (13)「B が騎士で人狼」でない
- (14)「A と B は同種であり B は人狼」でない
- (15)人狼は A
- (20)「A と B は異種であり A は人狼」でない
- (21)A と B は同種である
- (25)A と B は同種であり A が人狼
- (26)「B が悪漢で A が人狼」でない
- (28)B が騎士
- (31)B が騎士で A が人狼
- (32)「A と B は異種であり騎士である方が人狼」でない

この 16 個から 3 個を選んだ組で、補助定理 2 の(2)を満たすものを求める。この質問の組(X, Y, Z)を求める方法は卒業論文に示したが、ここでは 1 つ目の質問 X が選ばれているときの 2 つ目の質問 Y を選ぶ部分を示す。すなわち、2 つ目の質問 Y は、表 1 において、「A が騎士≡X」が○である 4 つの行で、「A が騎士≡Y」が○と×を 2 つずつとるように選ぶ(「A が騎士≡X」が×である 4 つの行でも「A が騎士≡Y」は○と×が 2 つずつになる)。

この方法を適用した例を表 4 に示す。表 4 は行の順番を入れ替えていることに注意してほしい。また、表 4 では質問の組((2), (13), (25))を得ている。

表 4: 質問の組み合わせ方

	(2)		(13)		(25)
1	○	→	○	→	○
2	○	→	○	→	×
3	○	→	×	→	○
5	○	→	×	→	×
7	×	→	○	→	○
6	×	→	○	→	×
8	×	→	×	→	○
4	×	→	×	→	×

さて、結果として得られた質問の全ての組は 59 個であった。さらに、否定形を考えた場合は、59 個の各組に対して 3 つの各質問を否定形に変えられるので、

$$59 \times 2^3 = 472 \text{ 個}$$

の組がある。

参考文献

- [1] 小野 寛晰:「情報科学における論理」、日本評論社、東京、1994
- [2] レイモンド・M・スマリヤン (川辺治之 訳):「この本の名は?」、藤原刷新株式会社、東京、2013