

嘘つきパズルの真理値表を用いた解法

2011SE128 木村雄一郎

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

私は、3年次の「ソフトウェア工学演習Ⅱ」で学んだ真理値表を用いた論理パズルの解法に興味をもった。論理パズルには様々なものがあるが、本研究では Smullyan[2]の論理パズルの真理値表による解法を研究していくことにした。その理由は2つある。第1の理由は、[2]の論理パズルの解法は言葉でのみで表現されていて、読解力が必要であるのに対し、真理値表による解法は表により、読解が容易であると考えたことである。第2の理由は、[2]の解法は、なぜそのように考えたのかが明記されていない、すなわち発想法がわからないのに対し、真理値表による解法は、総当たり法を用いていることからその発想が容易と考えたことである。

本研究では、[2]の第2章「どのお嬢さん？」の問題1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 第3章「魔女は誰？」の問題1, 2, 3, 5, 第4章「どちらの島？」の問題1, 2, 3, 4に真理値表を用いた解を与えた。本稿では、そのうちの第3章「魔女は誰？」の問題5の解を与えた。結果、真理値表を用いた解法の理解のしやすさ、解きやすさがわかった。真理値表を用いた解を与えた後に、[2]の解を見ると理解しやすいことがわかった。

本稿で用いる論理記号は、「～でない」を表す「 \neg 」, 「ならば」を表す「 \Rightarrow 」, 「同値」を表す「 \equiv 」の3つである。また、2つの真理値「真」と「偽」を、それぞれ「T」と「F」で表す。2つの命題P, Qがあった場合、 $\neg P, P \Rightarrow Q, P \equiv Q$ の真理値は以下の表1.1ようになる。

表 1.1 : 真理値表

P	Q	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	F	T	T	T

2 魔女は誰？

この節では、[2]の第3章「魔女は誰？」の問題5に対して真理値表を用いた解を与える。

まず、[2]における前提条件を以下に示す。

前提条件 2.1

- この島の住民は騎士か悪漢のどちらかである。
- 騎士は必ず真実を述べる。
- 悪漢は必ず嘘をつく。

この前提条件から次の性質 2.2 がいえる。

性質 2.2

(1) X が P と発言した $\Rightarrow H(X) \equiv P$

(2) 質問「P であるか？」に X が「はい」と答えた $\Rightarrow H(X) \equiv P$

(3) 質問「P であるか？」に X が「いいえ」と答えた $\Rightarrow H(X) \equiv \neg P$

(1)の証明は、小野[1]p. 20 ノート 1.4 と同様にできる。(2)と(3)は、(1)から導かれる。詳細は割愛する。

以下に問題 5 を要約して示す。

問題 5 (要約)

アーク, ボーク, カグ, ダグは、この島の住民である。この4人と学者の会話を以下に示す。この会話から、この島に金塊があるかどうかをわかった。このとき、この島に金塊はあるかどうかを求めよ。

会話

学者「この島に金塊はありますか？」

アーク「私は、この島に金塊があると発言したことがこれまでにあります。」

学者「この島に金塊はありますか？」

ボーク「私は、この島に金塊はないと発言したことはこれまでにありません。」

学者「アークとボークは同じ種族、すなわち、2人とも騎士か、2人とも悪漢かのいずれかですか？それとも違う種族ですか？」

カグは、アークとボークが同じ種族であるかどうかを答えた。

学者「あなたとカグは同じ種族ですか？」

ダグは、「はい」か「いいえ」のどちらかを答えた。

この問題に対する、真理値表を用いた解を以下に示す。

解

アークを A, ボークを B, カグを C, ダグを D とおき, X が騎士であることを $H(X)$, X が悪漢であることを $L(X)$, X と Y が同じ種族であることを $E(X, Y)$ とおく。

まず、最後の D の回答について考える。D が「はい」と答えたとき、性質 2.2(2)より、

$$H(D) \equiv E(C, D) \quad (*1)$$

となる。(*1)の真理値表をかくと、次の表 2.1 の

ようになる。

表 2.1 : (*1)の真理値表

H(C)	H(D)	H(D) ≡ E(C, D)
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

一方, D が「いいえ」と答えたとき, 性質 2.2(3)より,

$$H(D) \equiv \neg E(C, D) \quad (*2)$$

となる. (*2)の真理値表をかくと, 次の表 2.2 のようになる。

表 2.2 : (*2)の真理値表

H(C)	H(D)	H(D) ≡ ¬E(C, D)
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表 2.1 において, (*1)が真であるのは, 1, 2 行目のみである. よって, D が「はい」と答えたとき H(C)であることがわかる. また表 2.2 において, (*2)が真であるのは, 3, 4 行目のみである. よって D が「いいえ」と答えたとき L(C)であることがわかる. まとめると,

$$D \text{ が「はい」と答える} \Rightarrow H(C)$$

$$D \text{ が「いいえ」と答える} \Rightarrow L(C)$$

となる. ここで, D が「はい」または「いいえ」で答えたことから,

D の発言から, H(C)か L(C)かがわかることになる. さらに C の発言から,

C と D の発言から, E(A, B)か否かがわかる (*3) ことになる.

次に, A の発言について考える. A の発言を P(A)とする. 性質 2.2(1)より,

$$H(A) \equiv P(A) \quad (*4)$$

となる. また, 「この島に金塊がある」を Q とすると, P(A)の内容と性質 2.2(1)より,

$$P(A) \Rightarrow H(A) \equiv Q$$

となり, (*4)より,

$$H(A) \Rightarrow (H(A) \equiv Q) \quad (*5)$$

となる. (*5)について真理値表をかくと次の表 2.3 のようになる。

表 2.3 : (*5)の真理値表

H(A)	Q	H(A) ⇒ H(A) ≡ Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

さらに, B の発言について考える. B の発言を P(B)とする. 性質 2.2(1)より,

$$H(B) \equiv P(B) \quad (*6)$$

となる. また, P(B)の内容と性質 2.2(1)より,

$$\neg P(B) \Rightarrow (H(B) \equiv \neg Q)$$

となる. この対偶をとると,

$$(H(B) \neq \neg Q) \Rightarrow P(B)$$

となる. よって,

$$(H(B) \equiv Q) \Rightarrow P(B)$$

となり, (*5)より,

$$(H(B) \equiv Q) \Rightarrow H(B) \quad (*7)$$

となる. (*7)について真理値表をかくと次の表 2.4 のようになる。

表 2.4 : (*7)の真理値表

H(B)	Q	H(B) ≡ Q ⇒ H(B)
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

表 2.3 と表 2.4 をまとめると, 次の表 2.5 のようになる。

表 2.5 : H(A), H(B), Q

H(A)	H(B)	Q	(*5)	(*7)
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

表 2.5 において, (*5)と(*7)がどちらも Tなのは, 2, 4, 8 行目以外の 5 行である. つまり, E(A, B)のときに Q ということがわかり, ¬E(A, B)のときには Q かどうかわからない. ここで(*3)および「論理学者は金塊があるかどうかはわかった」(つまり Q か ¬Q かがわかった)ことから, E(A, B)と Q, すなわちアークとボークは同じ種族であることと, 金塊はあることがわかったことになる。

参考文献

- [1] 小野寛晰: 「情報数学における倫理」. 日本評論社, 東京, 1994
- [2] Raymond Smullyan: 「スマリヤン先生のブール代数入門-嘘つきパズル・パラドックス・論理の花咲く庭園-」. 共立出版, 東京, 2008