真理値表とロジカル・ラビリンス

2009SE076 伊勢田祥平

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

数理論理学における「論理パズル」は，理解する上で多くの知識と発想力を必要とする．本研究の目的は，Smullyan[1] において提示される様々な問題を，真理値表を用いることにより，専門的知識がない人にでも分かりやすく，かつ形式的に解答を導く手順を見出すことである．

私は卒業研究で [1] の第一部「一般化のすすめ」における問の解法を，真理値表を用いることによって示した．その際，問を解くにあたって必要となる前提条件や性質をみつけることができた．2 節において，[1] の「沈黙する騎士と悪漢」で与えられる前置きから読み取れる前提条件と，与えられる問を解くために必要となる定義，性質を述べ，3 節において，「沈黙する騎士と悪漢」で与えられる 1 題に真理値表を用いた解を与える．

2　「沈黙する騎士と悪漢」の前提条件と性質

この節では，[1] の「沈黙する騎士と悪漢」における問を解くために必要と考えた前提条件と定義，性質を記す．

前提条件 2.1
(1) この島のすべての住民は，騎士または悪漢のいずれかに属する．
(2) 騎士は常に正直に話す．
(3) 悪漢は常に嘘をつく．
(4) この島のすべての住民は，秘密の符牒を用いて「はい」か「いいえ」を答える．
(5) 赤札と黒札の 2 枚の札を携帯しており，一方は「はい」，もう一方は「いいえ」を意味する．
(6) 2 種類の札がどちらを意味するかはわからない．
(7)「はい」か「いいえ」で答えられる質問に対して，必ず赤札か黒札のどちらかを見せて答える．

定義 2.2　任意の住民 X に対し，k(X) :「X は騎士である」と定義する．また，R :「赤札が『はい』を意味する」と定義する．

性質 2.3　「X が質問「P であるか」に『赤札』で答える」⇔「$(\mathrm{k(X)} \equiv \mathrm{R}) \equiv \mathrm{P}$」

証明.
X が質問「P であるか」に『赤札』で答えたとする．$\mathrm{k(X)} \wedge \mathrm{R}$ のとき，騎士が『はい』と答えたことになるので，前提条件 2.1(2) より P がいえる．すなわち，

$$\mathrm{k(X)} \wedge \mathrm{R} \to \mathrm{P}$$

を得る．$\neg\mathrm{k(X)} \wedge \neg\mathrm{R}$ のとき，前提条件 2.1(1)，(4)，(5) より悪漢が『いいえ』と答えたことになるので，前提条件 2.1(3) より P がいえる． すなわち，

$$\neg\mathrm{k(X)} \wedge \neg\mathrm{R} \to \mathrm{P}$$

を得る．$((\mathrm{k(X)} \wedge \mathrm{R}) \vee (\neg\mathrm{k(X)} \wedge \neg\mathrm{R})) \equiv (\mathrm{k(X)} \equiv \mathrm{R})$ を用いて，

$$(\mathrm{k(X)} \equiv \mathrm{R}) \to \mathrm{P} \qquad (*1)$$

を得る．同様に，

$$\neg(\mathrm{k(X)} \equiv \mathrm{R}) \to \neg\mathrm{P} \qquad (*2)$$

を得る．$(*1)$，$(*2)$ より，

$$(\mathrm{k(X)} \equiv \mathrm{R}) \equiv \mathrm{P}$$

を得る．

よって，

「X が質問「P であるか」に『赤札』で答えた」
$$\Downarrow \qquad (*3)$$
「$(\mathrm{k(X)} \equiv \mathrm{R}) \equiv \mathrm{P}$」

を得る．同様に，

「X が質問「P であるか」に『黒札』で答えた」
$$\Downarrow$$
「$(\mathrm{k(X)} \equiv \mathrm{R}) \equiv \neg\mathrm{P}$」

を得る．対偶をとることにより，

「X が質問「P であるか」に『黒札』で答えない」
$$\Uparrow$$
「$(\mathrm{k(X)} \equiv \mathrm{R}) \equiv \mathrm{P}$」

を得る．前提条件 2.1(7)「『はい』か『いいえ」で答えられる質問に対して，必ず赤札か黒札のどちらかを見せて答える」より，『黒札』で答えないことは『赤札』で答えることと等しいため，

「X が質問「P であるか」に『赤札』で答えた」
$$\Uparrow \qquad (*4)$$
「$(\mathrm{k(X)} \equiv \mathrm{R}) \equiv \mathrm{P}$」

である．$(*3)$，$(*4)$ より，性質 2.3 が導ける．

3　奇妙な裁判

この節では次の問を解説する．

【問】

この島で，アバクロンビーは奇妙な裁判を目撃した．高価なダイヤモンドが盗難に遭い，容疑者が裁判にかけられ，三人の目撃者 A，B および C が審問された．他の島からきた裁判長は，赤札および黒札がそれぞれどちらを意味するのか知らなかった．裁判には島の住民でない者も出廷しているため，三人の目撃者は赤札と黒札の符牒だけで質問に答えようとした．

裁判官は，最初に「被告は無実か」と尋ねると，A は赤

札で答えた．

裁判官は，次に B に同じ質問をすると，B は黒札で答えた．

裁判官は，続けて B に「A と C は同種（二人とも騎士または二人とも悪漢）か」と質問すると，B は赤札で答えた．

最後に，裁判官は C に「この質問に対して赤札で答えるか」という奇妙な質問をすると，C は赤札で答えた．

さて，被告は無実か，それとも有罪か？

【解答】

I :「被告は無実である」と定義する．まず，裁判官の質問に対する A の返答を考える．A の返答と性質 2.3 より，「$(k(A) \equiv R) \equiv I$」は真 (T) である (∗1)．この真理値表を表 1 に示す (F は偽を表す)．(∗1) と表 1 より，k(A)，R，I の真理値の組は表 1 の第 1 行，第 4 行，第 6 行，第 7 行の 4 通りに絞られる．

表 1　A への質問

k(A)	R	I	(k(A) ≡ R)	≡	I
T	T	T	T	T	
T	T	F	T	F	
T	F	T	F	F	
T	F	F	F	T	
F	T	T	F	F	
F	T	F	F	T	
F	F	T	T	T	
F	F	F	T	F	

次に裁判官の質問に対する B の返答を考える．B は黒札で答えたため，B の返答と性質 2.3 より「$(k(B) \equiv \neg R) \equiv I$」は “T” である (∗2)．この真理値表を表 2 に示す．(∗2) と表 2 より，k(A)，k(B)，R，I の真理値の組は表 2 の第 2 行，第 4 行，第 5 行，第 7 行の 4 通りに絞られる．

表 2　B への質問 1

k(A)	k(B)	R	I	(k(B) ≡ ¬R)	≡	I
T	T	T	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F	T

さらに B への 2 つ目の質問を考える．B の返答と性質 2.3 より，「$(k(B) \equiv R) \equiv (k(A) \equiv k(C))$」は “T” である (∗3)．この真理値表を表 3 に示す．(∗3) と表 3 より，k(A)，k(B)，k(C)，R，I の真理値の組は表 3 の第 2 行，第 3 行，第 6 行，第 7 行の 4 通りに絞られる．

表 3　B への質問 2

k(A)	k(B)	k(C)	R	I	(k(B) ≡ R)	≡	(k(A) ≡ k(C))
T	F	T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	T	F
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	T	F	F	T

最後に C への質問を考える．「この質問に赤札で答える」(∗4) という質問に対し，C は「赤札で答えた」ことから，(∗4) は常に真である．このことと性質 2.3 より，「$(k(C) \equiv R) \equiv (*4)$」は “T” である (∗5)．この真理値表を表 4 に示す．(∗5) と表 4 より，表 4 のすべての行が “F” となり，答を導くことができない．

表 4　C への質問

k(A)	k(B)	k(C)	R	I	(k(C) ≡ R)	≡	(∗4)
T	F	F	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T

上の解答から，この問では，その設定に矛盾が含まれていることになる．

さて，[1] におけるこの問の解答は，「被告は無罪である」となっている．導出方法は背理法，すなわち，「被告が有罪である」という仮定から矛盾を導く方法である．この方法では，「被告は無罪である」と仮定したときの吟味は不要で，[1] の解答でもその吟味を行っていない．しかし，実際は，上の本研究の解答からもわかるように，「被告は無罪である」と仮定しても矛盾が導かれる．

つまり，[1] の方法では，問自身に含まれる矛盾に気づくことはできないが，真理値表を用いた解法では気づくことができる．真理値表を用いた解法が，すべての可能性を同時に扱うからである．これは，真理値表を用いた解法の利点である．

4　おわりに

本研究では，[1] に真理値表を用いた解法で解を与えることにより，真理値表の持つ利点を見出した．また，真理値表を理解した上で用いることの難しさを知り，その中で一定の法則があることを考察できた．今後も機会があれば，異なった条件下における真理値表の利用を試してみたい．

参考文献

[1] Raymond Smullyan(高橋昌一郎 監訳・川辺治之 訳)：『記号論理学－一般化と記号化－』．丸善出版，東京，2013.