J リーグ優秀チームの数理的順位付け

2012SE086 片濱脩人

指導教員：小藤俊幸

1 はじめに

日本の J1 リーグは 1990 年代に創設され，開幕時には社会現象になるほどの人気があった. そして，その長い歴史の中には数多くの優秀チーム，優秀選手が存在している.J1 リーグ開幕後，現在まで 8 チームが優勝を経験している. そこで，ある条件において，J1 リーグに所属する 18 チームで順位を付けたとき，どのような順位になるのかを知りたい. その理由としては，J1 リーグで優勝した回数が同じであるチームの順位がどのようになるか，優勝した回数が多いチームが本当に強いのか，負けが多いが強いチームに勝ったチームがどのような順位になるのかなどの疑問が多く残っているからである.

2 データについて

J リーグのチーム別戦績データは，J.League Data Site のデータを使用した.[1] そのデータには，過去の対戦成績が正確に記録されている. そして今回は，2016 年度の J1 リーグに所属している 18 チームで純粋な「強さ」についてのランキング表を作成する.

J.League Data Site のデータから 18 チームの過去の対戦成績において，勝利回数の多いチームを一対比較値として 1 を対応させ，少ないチームに 0 を対応させる. ただし，引き分けの場合も 0 を対応させ，対戦成績表を作成した.

チーム	仙台	鹿島	浦和	大宮	柏	東京	川崎	横浜マ	湘南	甲府	新潟	磐田	名古屋	大阪	神戸	広島	福岡	鳥栖
仙台	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
鹿島	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
浦和	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
大宮	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
柏	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0
東京	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
川崎	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
横浜マ	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
湘南	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
甲府	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
新潟	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
磐田	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
名古屋	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
大阪	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
神戸	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
広島	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1
福岡	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
鳥栖	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0

表 1　対戦成績表

3 順位付けの方法

3.1 各チームの得点

各チームに $x_1, x_2, x_3, ..., x_8$ のような「強さ」を表す非負の値が付いているものとする. その値が大きいほど強く，値が小さいほど弱いと考える.

ベガルタ仙台の場合，横浜 F. マリノス，湘南ベルマーレ，ヴァンウォーレ甲府，ヴィッセル神戸，アビスパ福岡，サガン鳥栖に勝利しているので，ベガルタ仙台の「得点」は，

$$x_8 + x_9 + x_{10} + x_{15} + x_{17} + x_{18}$$

となる. 同様にすべてのチームの「得点」を求め，チームの「得点」はチームの「強さ」に比例するものとし，比例定数を λ とすると次の関係が得られる.

$$x_8 + x_9 + x_{10} + x_{15} + x_{17} + x_{18} = \lambda\ x_1$$

同様に，他のチームでもこの関係が得られる.

3.2 ペロン・フロベニウスの定理

表 1 の対戦成績表を行列で表すと,

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&1&0&1&1\\
1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\
1&0&0&1&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0\\
1&0&0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0&0&1&0&1&1\\
1&1&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1\\
0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\
1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1&0&1&1\\
1&0&1&0&1&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0\\
1&0&1&1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

となる.

この行列を隣接行列Aとするとき，固有多項式を隣接行列Aを用いて表すと,

$$Av = \lambda\ v$$

となる.

つまり，λ はAの固有値，v は固有ベクトルである.

非負行列の絶対値固有値を達成する非負の固有値を主固有値と呼ぶ. ペロン・フロベニウスの定理 [2] とは, 非負の要素を含む正方行列が既約であれば, 以下が成り立つ.

(1) 主固有値が正の実数として存在し, その固有値の絶対値は主固有値よりも大きくない.

(2) 主固有値に対応する固有ベクトルとして, すべての要素が正のものが存在する. また, 固有ベクトルは定数倍を除いて一意的である.

ペロン・フロベニウスの定理より，非負の固有値と対応する非負の固有ベクトルを取れれば，固有ベクトルの各成分の値を比較して順位を付けることができる.

4 計算過程

統計解析ソフト「R」を使い固有値を計算すると次のような結果が出た.(x_3〜x_{18} は省略)

```
> eigen(A)
$values
 5.5113546+0.0000000i -0.1343753+2.7514675i
-0.1343753-2.7514675i -0.4481414+2.0605657i
-0.4481414-2.0605657i -0.4637762+1.5132519i
-0.4637762-1.5132519i -0.5323827+1.3664677i
-0.5323827-1.3664677i -0.5187513+1.0643666i
-0.5187513-1.0643666i  1.1143607+0.0000000i
-0.7560066+0.1404833i -0.7560066-0.1404833i
-0.2943147+0.5953017i -0.2943147-0.5953017i
-0.1827863+0.0000000i -0.1474328+0.0000000i
$vectors
                [,1]                      [,2]
 [1,] 0.11302583+0i -0.16442705-0.02876510i
 [2,] 0.47754598+0i  0.26683309-0.15190593i
 [3,] 0.29661854+0i  0.07474879+0.27244157i
 [4,] 0.09903004+0i -0.19092350-0.11003348i
 [5,] 0.29896100+0i  0.06070594+0.07906786i
 [6,] 0.20574657+0i -0.18086667+0.07912412i
 [7,] 0.32988717+0i  0.00345838-0.07558528i
 [8,] 0.36251044+0i  0.21834235-0.26278493i
 [9,] 0.03578162+0i -0.06571018-0.01813985i
[10,] 0.03211257+0i  0.12480816+0.05671833i
[11,] 0.17814879+0i -0.10780672+0.08596903i
[12,] 0.33332307+0i  0.40974985+0.00000000i
[13,] 0.17948311+0i  0.24693892+0.09197049i
[14,] 0.27049230+0i  0.24641407+0.12199554i
[15,] 0.04970754+0i -0.11703574+0.05124737i
[16,] 0.14955555+0i -0.06269774+0.32504774i
[17,] 0.02742822+0i -0.11013204+0.01073630i
[18,] 0.11538505+0i  0.05096863-0.28632757i
```

5 ランキング表

計算過程より，順位付けをするとランキングは表 2 のようになる.

6 終わりに

計算結果より作成したランキング表では，優勝回数では 2 位のサンフレッチェ広島が 11 位. 優勝回数が同じ 2 回の横浜 F. マリノス，ジュビロ磐田，ガンバ大阪は，2 位，3 位，7 位. 優勝回数が同じ 1 回の浦和レッズ，柏レイソル，名古屋グランパスは，5 位，6 位，9 位という結果になった. 勝利数と順位に関しては，対戦表において大宮アルディージャは 4 チームに勝利していて，サガン鳥栖は 3 チームに勝利している. しかし，サガン鳥栖は，ランキング上位のジュビロ磐田，ガンバ大阪に勝利しているため，大宮アルディージャより順位が上位になっている. アルビレックス新潟もまた，9 チームに勝利しているが，8 チームにしか勝利していないがランキング上位のチームに勝利している名古屋グランパスのほうが，アルビレックス新潟より上位になっている. このことから優勝を経験しているチームでも純粋に「強さ」にというランキングでは，必ず上位に入れるわけではない. また，その順位も，優勝回数が多ければ高いわけではなく，同じ優勝回数でも明確に順位が順位が違ってくる. そして，勝利回数は少なくとも，強いチームに勝利していれば,「強さ」のランキングでは順位が上がることがわかった.

順位	チーム
1 位	鹿島アントラーズ
2 位	横浜 F. マリノス
3 位	ジュビロ磐田
4 位	川崎フロンターレ
5 位	浦和レッズ
6 位	柏レイソル
7 位	ガンバ大阪
8 位	FC 東京
9 位	名古屋グランパス
10 位	アルビレックス新潟
11 位	サンフレッチェ広島
12 位	ベガルタ仙台
13 位	サガン鳥栖
14 位	大宮アルディージャ
15 位	ヴィッセル神戸
16 位	湘南ベルマーレ
17 位	ヴァンウォーレ甲府
18 位	アビスパ福岡

表 2 作成したランキング

順位	チーム
5 回	鹿島アントラーズ
3 回	サンフレッチェ広島
2 回	横浜 F. マリノス
2 回	ジュビロ磐田
2 回	ガンバ大阪
1 回	浦和レッズ
1 回	柏レイソル
1 回	名古屋グランパス

表 3 優勝回数ランキング

参考文献

[1] J.League Data Site, https://data.j-league.or.jp/SFTP01/

[2] 関谷 和之・高木 英明,「ランキングを求める数理的方法」サービスサイエンスことはじめ