

# 公平性を考慮した安定結婚問題に対するアルゴリズム

2012SE065 石川結菜

指導教員:福嶋雅夫

## 1 はじめに

安定結婚問題とは, Gale と Shapley により 1962 年に提唱された安定という性質をもつマッチングを求める問題である. この問題は目的関数をもたず, ある性質を満たすマッチングを求めることが問題であるため, 最適化問題ではない. しかし, 奥深さと応用性の高さから, 多くの研究や現実問題への適用が盛んに行われている [3]. この問題は同人数の男女に対して, それぞれの選好順位を考慮して, すべての人が不平を持たないようなペア (安定マッチング) を見つけるために考えられた問題である [2]. Gale と Shapley により提案された Gale-Shapley アルゴリズム (以後 G-S アルゴリズムとよぶ) は, 安定マッチングを効率よく求めることができるが, 得られる解は男性側に有利な安定マッチングか, 女性側に有利な安定マッチングかどちらかの性に強く依存した性質をもつ. 本研究では, この課題を解決するために, 男女がより公平になるようなマッチングを求めるアルゴリズムを提案する. このアルゴリズムで得られた結果と G-S アルゴリズムで得た結果に対して様々な観点から評価を行い, 考察を行う.

## 2 安定マッチング

### 2.1 安定結婚問題

安定結婚問題とは,  $n$  人の男性の集合と  $n$  人の女性の集合があり, 各人はすべての異性に対して選好順序 (好む順番) をもっているとき, 安定マッチングと呼ばれる男性と女性の 1 対 1 対応を見つける問題である. 一般に男性と女性のカップルをペアといい, いくつかのペアによって構成される集合に対して, すべての人がいずれかのペアに属し, かつ, どの人も 1 つより多くのペアに属さないとき, その集合はマッチングとよばれる. ここで不平を持つペアとは, 互いにそれぞれが現在組まれている相手よりも互いを好むペアのことである. このようなペアをブロッキングペアとよぶ. ブロッキングペアを含まないマッチングを安定マッチングといい, ブロッキングペアを含むマッチングを不安定マッチングとよぶ [3].

### 2.2 Gale-Shapley アルゴリズム

G-S アルゴリズムには男性から女性にプロポーズする場合と, 女性から男性にプロポーズする場合の 2 通りが存在する. 以下に述べるアルゴリズムは男性から女性にプロポーズする場合のものである. アルゴリズム中のプロポーズという言葉は, 異性にペアになることを申し込むことを意味する.

step 0 (初期設定) 全員を独身とする.

step 1 独身の男性が存在する限り, 以下の (1) ~ (4) の操作を繰り返す.

- (1) 独身の男性を 1 人選ぶ.
- (2) (1) で選ばれた男性がプロポーズしていない女性の中で, 選好順序が最も高い (好きな) 女性にプロポーズする.
- (3) (2) でプロポーズされた女性が独身なら, 女性はプロポーズを受け入れ男性と婚約する.
- (4) (2) でプロポーズされた女性が婚約中なら, 現在のパートナーの男性と, プロポーズした男性の選好順位を比較する. もし, 婚約中のパートナーの選好順位の方が上なら, 女性はプロポーズを断る. プロポーズした男性の選好順位の方が上である場合, 婚約を解消し, プロポーズした男性と婚約する.

## 3 提案するアルゴリズム

G-S アルゴリズムにおいては, 男性からプロポーズして得られる安定マッチングは男性側に有利な安定マッチングに, 女性からプロポーズして得られる安定マッチングは女性側に有利な安定マッチングになり, どちらかに偏った結果になる. 本節では, 男性と女性がより平等になるような新たなアルゴリズムを提案し, 以下に示す.

第 1 段階 G-S アルゴリズムを用いて男性からプロポーズした安定マッチングを求める.

第 2 段階 第 1 段階で決定した安定マッチングを女性の立場で見えていき, 女性が設定したある順位 (全体の  $100\alpha\%$ ) よりも高い男性と組めていたらそのペアは確定させる. そしてそのペアを確定済みの配列に格納する.

第 3 段階 確定済み配列に格納された男性と女性を取り除き, 女性から男性にプロポーズしたときの安定マッチングを求める.

男性と女性を入れ替えたアルゴリズムも同様に考えることができる.

## 4 計算実験

本節では, 前節で提案したアルゴリズムを用いて計算実験を行う. ただし, 実験では男性からプロポーズする場合のみを考える. まず, 乱数を用いて, 同じ人数に対して男性と女性それぞれの選好順位を 100 パターン作成する. つぎに, 上位何 % とペアになっていたら確定とするかを表すアルゴリズムのパラメータ  $\alpha$  の値を変化させていき,  $\alpha$  の値ごとに上記の 100 パターンの選好順位に対して, マッチングを作成する. その結果を様々な観点から評価し, 比

較する。

#### 4.1 評価する観点

提案したアルゴリズムによって得られたマッチングを次の4つの実験を通して G-S アルゴリズムで得た結果と比較し、評価する。

実験1 最小重み安定結婚問題の目的関数であるマッチング  $M$  の各ペアに対する重みの総和  $\sum_{(h,d) \in M} c_h(d) + \sum_{(h,d) \in M} c_d(h)$  に加え、男女別の重みの総和も比較する。

実験2 両性公平安定結婚問題の目的関数である各男性の重みの総数と各女性の重みの総数の差  $|\sum_{(h,d) \in M} c_h(d) - \sum_{(h,d) \in M} c_d(h)|$  を比較する。

実験3 最大順位最小安定結婚問題の目的関数  $\max_{(h,d) \in M} \{rank_h(d), rank_d(h)\}$  をもとに、マッチング  $M$  の中でペアの相手に対する順位(最大順位)が最も低い人の順位を比較する。

実験4 最小後悔安定結婚問題の目的関数  $\max_{(h,d) \in M} \{c_h(p_M(h)) - c_h(p_{M_1}(h)), c_d(p_M(d)) - c_d(p_{M_1}(d))\}$  をもとに各人にとって最良の結果での重みと現在の状況での重みの差である後悔値を比較する。

#### 4.2 計算実験結果

ここでは紙数の都合で、実験1の結果のみを示す。他の実験結果については卒業論文を参照していただきたい。

#### 4.3 実験1

各ペアに対する重みの総和について、生成した100個の例題に対する結果の平均を示す。さらに、男性側と女性側がどれだけ満足しているかを見るため、それぞれの重みの和も図に示す。ただし、図の横軸はパラメータ  $\alpha$  の値を表す。

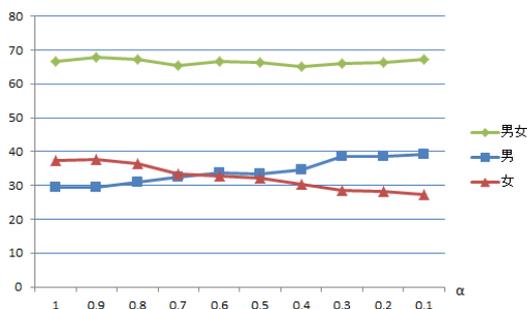


図1 重みの和 (10人対10人)

#### 4.4 実験1 - 考察

図1では、男性と女性の重みの和はパラメータ  $\alpha$  の値によらずほぼ一定である。図2では、男女の重みの和は G-S アルゴリズムの結果と比べて  $\alpha$  を小さくしていくと重みは少し小さくなっていく、すなわち全体の満足度が少し大

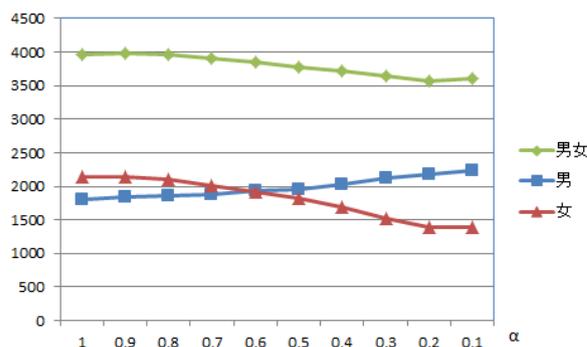


図2 重みの和 (100人対100人)

きくなっていくことがわかる。図1と図2のいずれの場合も、男性と女性の重みをそれぞれ個別で見ると、G-S アルゴリズムの結果は男性の方が重みが小さく、女性よりも満足していることから、男性からプロポーズした場合の安定マッチングは男性側に有利な安定マッチングになるということが確かめられる。しかし、パラメータ  $\alpha$  の値を小さくしていくと、女性の重みの方が次第に小さくなっていき、男性の重みは次第に大きくなっていく。 $\alpha = 0.6$  のとき男性と女性の重みはほぼ等しく、男性と女性が同じくらい満足していることがわかる。

この結果から、男女を公平にするためには、提案するアルゴリズムでパラメータ  $\alpha = 0.6$ 、つまり女性からみた男性の選好順位が上位60%の男性とペアを組めていたら確定するという方法が適していると考えられる。

## 5 まとめ

本研究では、どちらか一方からしかアプローチできない G-S アルゴリズムに新たな計算手順を付け加え、男性と女性の両方向からアプローチできるアルゴリズムを提案した。上位何%とペアになっていたら確定とするかを表すアルゴリズムのパラメータ  $\alpha$  の値を変化させ、 $\alpha$  の値ごとに100パターンの選好順位に対して、マッチングを作成し、その結果を様々な観点から比較し、提案したアルゴリズムの評価を行った。4つの実験結果から、 $\alpha$  の値を適切に設定すれば、安定マッチングという性質を持つとは限らないが、G-S アルゴリズムよりも男性と女性が公平なマッチングが得られることがわかった。

## 参考文献

- [1] D. Gale and L.S. Shapley, College admissions and the stability of marriage, *American Mathematical Monthly*, 69:pp.9-15, 1962.
- [2] 松井泰子・根本俊男・宇野毅明, 入門オペレーションズ・リサーチ, 第10章, 東海大学出版会, 2008
- [3] 根本俊男, 安定結婚問題, 久保幹雄・田村明久・松井知己 (編) 応用数理計画ハンドブック, 14.2節, pp.779-830, 朝倉書店, 2002