マルチリーダーフォロワーゲームに対する ガウス・ザイデル型ペナルティ法

2012SE044 堀篤史
指導教員：福嶋雅夫

1 はじめに

マルチリーダーフォロワー (multi-L/F) ゲームは経済学をはじめ，様々な分野で現れる，ゲーム理論における重要なモデルといえる [2]．Multi-L/F ゲームは複数の先手プレイヤーと後手プレイヤーが互いに最適な戦略（ナッシュ均衡：自分だけ戦略を変えてもそれ以上の利得を得られないような状態がすべてのプレイヤーに対して成り立つ戦略の組）を求めるゲームである．本研究では各プレイヤーが数理計画問題を解くゲームを対象とする．プレイヤーが上層と下層に分けられるこのゲームは，均衡問題を制約条件として持つ均衡問題 (EPEC) として定式化できるが，数学的性質上，そのままの形で解くことが困難である．本研究では，multi-L/F ゲームに対する新たな数値解法を提案し，数値実験を行う．

2 Multi-L/F ゲームの定式化

Multi-L/F ゲームは目的関数や制約集合などの性質によって，様々な形に再定式化される．ここでは，multi-L/F ゲームに対する一般的なアプローチである EPEC への再定式化を紹介する．まず，記号の定義をする．N 人の先手プレイヤー（以後，先手という）をラベル $\nu = 1, ..., N$ によって表し，M 人の後手プレイヤー（以後，後手という）をラベル $\omega = 1, ..., M$ によって表す．先手 ν の戦略を $x^\nu \in \Re^{n_\nu}$，後手 ω の戦略を $y^\omega \in \Re^{m_\omega}$ と表す．$n := n_1 + \cdots + n_N, m := m_1 + \cdots + m_M$ とする．$\theta_\nu : \Re^{n+m} \to \Re$, $X^\nu (\subseteq \Re^{n_\nu})$ をそれぞれ，先手 ν のコスト関数，戦略空間とする．$\gamma_\omega : \Re^{n+m} \to \Re$, $Y^\omega(x) (\subseteq \Re^{m_\omega})$ をそれぞれ，後手 ω のコスト関数，戦略空間とする．先手 ν は次の数理計画問題を解く．

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x^\nu}{\text{minimize}} & \theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y) \\
\text{subject to} & x^\nu \in X^\nu
\end{array} \tag{1}
$$

ここで，$x^{-\nu} := (x^1, ..., x^{\nu-1}, x^{\nu+1}, ..., x^N)$ である．後手 ω は先手の戦略 $x \in \Pi_{\nu=1}^N X^\nu$ に対して，次の数理計画問題を解く．

$$
\begin{array}{ll}
\underset{y^\omega}{\text{minimize}} & \gamma_\omega(y^\omega, y^{-\omega}, x) \\
\text{subject to} & y^\omega \in Y^\omega(x)
\end{array} \tag{2}
$$

ここで，$x := (x^\nu)_{\nu=1}^N$，$y := (y^\omega)_{\omega=1}^M$ であり，任意の戦略ベクトル x に対して，$Y^\omega(x)$ は閉凸集合とする．すなわち，後手の数理計画問題は，y^ω を変数とする凸計画問題である．また，先手も後手もコスト関数はともに連続微分可能と仮定する．

後手の問題に対する一次の最適性条件は，変分不等式として表すことができる．いま，後手の問題は凸であることから，最適性条件は必要十分となるので，次のような形で先手の制約条件に取り入れられ，先手 ν の問題は x^ν と y を決定変数とする均衡制約付き数理計画問題 (MPEC) として定式化される．

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x^\nu, y}{\text{minimize}} & \theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y) \\
\text{subject to} & x^\nu \in X^\nu, \\
 & y \text{ solves } \mathrm{VI}(Y(x), F(x, \cdot))
\end{array} \tag{3}
$$

ここで，任意の先手 ν に対して，y も決定変数とみなされることに注意する．以後これを共有変数と呼ぶことにする．また，$\mathrm{VI}(Y(x), F(x, \cdot))$ は，x をパラメータとする変分不等式問題 $F(x, y)^T(y' - y) \geq 0,\ \forall y' \in Y(x)$ を表す．ただし，$Y(x) := \Pi_{\omega=1}^M Y^\omega(x)$，$F(x, y) := (\nabla_{y^\omega} \gamma_\omega(x, y^\omega, y^{-\omega}))_{\omega=1}^M$ である．

EPEC とは，N 人の先手が同時に問題 (3) の最適解を達成するような均衡解 (x^*, y^*) を見つける問題のことをいう．

3 ガウス・ザイデル型ペナルティ法

本研究では，multi-L/F に対して EPEC による定式化に基づく解法を提案する．ここでは説明を簡単にするため後手が 1 人 ($M = 1$) の場合を考える．

Multi-L/F ゲームを EPEC に定式化したとき，(i) 制約条件が他の先手プレイヤーの決定変数 $x^{-\nu}$ に依存する．(ii) y は共有変数として，他のプレイヤーも決定変数としてもつ，など EPEC 特有の問題が生じる．問題 (1),(2) の戦略集合をそれぞれ，$X^\nu := \{x^\nu \in \Re^{n_\nu} \mid g^\nu(x^\nu) \leq 0,\ h^\nu(x^\nu) = 0\}$，$Y(x) := \{y \in \Re^m \mid u(x, y) \leq 0,\ v(x, y) = 0\}$ とし，先手の制約関数 g^ν, h^ν は連続的微分可能，後手の制約関数 u, v は 2 回連続微分可能と仮定する．後手の最適化問題をラグランジュ乗数 λ, μ を用いて KKT 条件に置き換え，制約条件に取り入れると，先手 ν の問題 (3) は次の MPEC になる．

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x^\nu, y, \lambda, \mu}{\text{minimize}} & \theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y) \\
\text{subject to} & g^\nu(x^\nu) \leq 0,\ h^\nu(x^\nu) = 0, \\
 & \psi(x, y, \lambda, \mu) = 0
\end{array} \tag{4}
$$

ただし，

$$
\psi(x, y, \lambda, \mu) := \begin{bmatrix} \nabla_y \gamma(x, y) + \nabla_y u(x, y)\lambda + \nabla_y v(x, y)\mu \\ \Phi(-u(x, y), \lambda) \\ v(x, y) \end{bmatrix}
$$

とする．ここで，Φ は Fischer-Burmeister 関数（FB 関数）$\phi(a, b) := a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$ を成分とするベクトル値関数である．FB 関数は $(a, b) = (0, 0)$ で微分可能でないため，問題 (4) をこのまま解くことは難しい．そこで，FB 関数を 2 乗すると任意の点で微分可能になるという性

質を利用して，関数 ψ をペナルティ関数として目的関数に次のように取り入れる．

$$\tilde{\theta}_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y, \lambda, \mu; \rho) := \theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y) + \frac{\rho}{2}||\psi(x^\nu, x^{-\nu}, y, \lambda, \mu)||^2 \tag{5}$$

ここで $\rho > 0$ はペナルティパラメータである．ペナルティ関数を用いて問題 (4) は次のように近似される．

$$\begin{array}{ll} \underset{x^\nu, y, \lambda, \mu}{\text{minimize}} & \tilde{\theta}_\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y, \lambda, \mu; \rho) \\ \text{subject to} & g^\nu(x^\nu) \le 0,\ h^\nu(x^\nu) = 0 \end{array} \tag{6}$$

提案するアルゴリズムは以下の通りである．

Algorithm: EPEC Gauss-Seidel Penalty method

0. ペナルティパラメータの初期値 $\rho_0 > 0$，更新係数 $c > 1$，許容誤差 $\varepsilon > 0$，最大ステップ数 $K_{\max}$ を定め，$k := 0$ とする．初期点 $(x^{(0)}, y^{(0)})$ を選ぶ．
1. $\nu = 1$ とする．
2. 先手 ν の問題 $\min_{(x^\nu, y, \lambda, \mu)} \left\{ \tilde{\theta}_\nu(x^\nu, x^{-\nu,(k)}, y, \lambda, \mu; \rho_k) \,\middle|\, g^\nu(x^\nu) \le 0,\ h^\nu(x^\nu) = 0 \right\}$ を解いて点 $(x^{\nu,(k+1)}, y^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}, \mu^{(k+1)})$ を求める．ただし，$x^{-\nu,(k)} := (x^{1,(k+1)}, ..., x^{\nu-1,(k+1)}, x^{\nu+1,(k)}, ..., x^{N,(k)})$ である．
3. $\nu < N$ ならば，$\nu := \nu + 1$ とし，2. に戻る．さもなければ，4. に進む．
4. $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| < \varepsilon$ ならば，5. に進む．そうでなければ，6. に進む．
5. $||\psi(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}, \mu^{(k+1)})|| < \varepsilon$ ならば，解を出力する [1]．さもなければ，$\rho_{k+1} := c\rho_k$ に更新し，$k := k + 1$ として 1. に戻る．
6. $k = K_{\max}$ ならば，終了．さもなければ，$k := k+1$ とし 1. に戻る．

4 数値実験

ここでは，次のような $N = 2, M = 1$ の multi-L/F ゲームに対する数値実験の結果を示す．

先手 $\nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}$ の最適化問題：

$$\begin{array}{ll} \underset{x^\nu \in \Re^2}{\text{minimize}} & \frac{1}{2}(x^\nu)^T H_\nu x^\nu + (x^\nu)^T E_\nu x^{-\nu} + (x^\nu)^T D_\nu y \\ \text{subject to} & A_\nu^T x^\nu + b_\nu \le 0 \end{array}$$

後手の最適化問題：

$$\begin{array}{ll} \underset{y \in \Re^3}{\text{minimize}} & \frac{1}{2}y^T B y + c^T y - (x^{\mathrm{I}})^T D_{\mathrm{I}} y - (x^{\mathrm{II}})^T D_{\mathrm{II}} y \\ \text{subject to} & Ay + a = 0 \end{array}$$

係数のデータは紙数の都合上省略する．詳細は [1] を参照．

この multi-L/F ゲームの均衡解は $(x^{\mathrm{I}*}; x^{\mathrm{II},*}; y^*) = (-0.2168, -0.7488; -0.3523, -0.7803; -0.2798, -0.3257, -0.0859)$ であることがわかっている [1]．ここでは，EPEC に対する最も単純な解法である非線形ガウス・ザイデル法と本研究で提案するガウス・ザイデル型ペナルティ法で解いた結果を比較する．いずれも，初期点 $x^{(0)} := (0, 0; 0, 0), y^{(0)} := (0, 0, 0)$，許容誤差 $\varepsilon := 0.001$，最大ステップ数 $K_{\max} := 20$ とした．

ここで，非線形ガウス・ザイデル法を簡単に説明する．非線形ガウス・ザイデル法は，各反復において，先手 ν の MPEC(4) をそのままの形で $\nu = \mathrm{I}$ から順に解く．ただし，先手 ν の問題 (4) において，他の先手プレイヤーの戦略は $x^{-\nu,(k)} := (x^{1,(k+1)}, ..., x^{\nu-1,(k+1)}, x^{\nu+1,(k)}, ..., x^{N,(k)})$ に固定する．この例では ψ は任意の点で微分可能なので，特殊な MPEC の手法を用いる必要はない．

非線形ガウス・ザイデル法での結果

7 回の反復で，均衡解ではない点 $x^{\mathrm{I},*} = (0.0135, -0.6237), x^{\mathrm{II},*} = (0.0132, -0.6235), y^* = (-0.1184, -0.5134, 0.0478)$ を得た．計算時間は 1.344483 秒であった．

ガウス・ザイデル型ペナルティ法での結果

$\rho_0 := 1, c := 10$ とした．反復回数は $k = 9$ で停止し，均衡解に近い点 $x^{\mathrm{I},*} = (0.2167, -0.7487), x^{\mathrm{II},*} = (-0.3523, -0.7803), y^* = (-0.2799, -0.3255, -0.0860)$ を得た．計算時間は 2.563112 秒であった．

考察

この数値例において，ガウス・ザイデル型ペナルティ法は均衡解に収束することが確かめられた．また，ガウス・ザイデル型ペナルティ法では，ペナルティパラメータ ρ や許容誤差 ε を注意深く，適切に設定する必要があることがわかった．更新係数に関してはステップ数に依存した数列として設定すると良いと考えられる．

5 おわりに

本研究では，multi-L/F ゲームを EPEC に再定式化したときに生じる微分不可能性や共有変数，制約条件が他の先手プレイヤーの戦略に依存するといった問題を解消するために，ペナルティ法を応用し，ガウス・ザイデル型ペナルティ法を提案した．課題としては，後手の問題に不等式制約が含まれる場合に対して数値実験を行うことである．また，数値実験では，各プレイヤーの共有変数は互いに近い値に収束することが確かめられたが，一般に誤差を含むため，厳密に等しくはならないことにも留意する必要がある．

参考文献

[1] M. Hu and M. Fukushima: Existence, uniqueness, and computation of robust Nash equilibria in a class of multi-leader-follower games, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 23, No. 2, pp. 894-916, 2013.

[2] M. Hu and M. Fukushima: Multi-leader-follower games: Models, methods and applications, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 58, No. 1, 2015, pp. 1-23.

[1] ここで，共有変数 y, λ, μ は $\nu = N$ の解を取り入れることにする．