不確実性をもつ在庫管理問題に対するロバスト最適化手法の適用

2012SE006 青山貴彦

指導教員：福嶋雅夫

1　はじめに

在庫管理問題は，生産，物流，販売システムにおける根幹の問題として，古くから研究が進められてきた．特に，未来の状態が既知であり，確実であると仮定された問題については，多品目，多階層，多期間まで想定した発展が見られる．しかしながら，現実問題において一般に未来は未知であるため，不確実性を考慮しなければならない．不確実性を考慮するにあたり，しばしば確率的最適化手法が適用されるが，多くの付加条件を考えなければならない現実の問題においては，いわゆる次元の呪いにより適用が困難になる [2].

本研究では不確実性を考慮するにあたり，確率的最適化手法とならぶ代表的な手法であるロバスト最適化手法を適用し，在庫管理問題の最適化を行う．

2　準備

2.1　2 次錐

次式で定義される集合を $n+1$ 次元の 2 次錐と呼ぶ．

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{array}{ll} \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \geq \|x\|\} & (n \geq 1) \\ \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} & (n = 0) \end{array} \right.$$

ここで $\|x\|$ はベクトル x のユークリッド・ノルムである．

2.2　ロバスト最適化

ロバスト最適化では，不確実性をもつデータの生じうる範囲をあらかじめ設定し，その中でも最も都合の悪い状況が生じた場合を想定したモデル化が行われている．そのモデリング技法および解法を含めて，ロバスト最適化技法と呼ばれる．この考え方は，1973 年時点で既に Soyster によって用いられていたが，Ben-Tal と Nemirovski が 1998 年にロバスト最適化を提案して以来，不確定なデータの変動に対してロバストな意思決定を行なうための手法として注目され，さかんに研究が行われるようになった [1]．ある適当な仮定のもとで，ロバスト最適化問題は以下のように 2 次錐計画問題に変換できる．

つぎの不確実性をもつ線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \hat{c}^T x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array} \tag{1}$$

不確実なデータがとりうる範囲を不確実性集合とよぶ．不確実性集合の与え方は多種存在し，代表的なものとしては矩形と楕円形が挙げられる．本研究においては楕円形の特殊ケースである円形として与えるため，不確実性なデータ $\hat{c}$ に対して不確実性集合を $\mathcal{U} = \{\hat{c} \,|\, \hat{c} = c + \delta u, \|u\| \leq 1\}$ とする．ただし，c とδ はそれぞれ与えられたベクトルと正数である．ロバスト最適化では，不確実性のもとでの最悪の場合，すなわち $\max_{\hat{c} \in \mathcal{U}} \hat{c}^T x$ を問題 (1) の目的関数とする．この目的関数は

$$\max_{\hat{c} \in \mathcal{U}} \hat{c}^T x = c^T x + \delta \max_{\|u\| \leq 1} x^T u = c^T x + \delta \|x\|$$

と書けるので，この問題は

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x + \delta \|x\| \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

と表される．ここで新たな変数 t を導入することで, この問題はさらに次のように書きかえられる．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x + \delta t \\ \text{subject to} & Ax \leq b \\ & \|x\| \leq t \end{array}$$

$\|x\| \leq t$ は $(t, x) \in \mathcal{K}$ と等価である．このように制約条件に 2 次錐が含まれる問題を 2 次錐計画問題という．

3　在庫管理のロバスト最適化モデル

本研究では，在庫管理問題における基本的な問題の 1 つである動的ロットサイズ決定問題 [3] を取り扱う．

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t y_t + c_t x_t + h_t I_t) & \\ \text{subject to} & I_t = I_{t-1} + x_t - d_t & t \in \mathcal{T} \\ & I_0 = 0 & \\ & 0 \leq I_t \leq C_t & t \in \mathcal{T} \\ & 0 \leq x_t \leq M_t y_t & t \in \mathcal{T} \\ & y_t \in \{0, 1\} & t \in \mathcal{T} \end{array} \tag{2}$$

ここで，x_t, I_t はそれぞれ t 期の生産量と在庫量を表す変数であり，y_t は t 期に生産する場合 1, しない場合 0 となるバイナリ変数である．c_t, h_t はそれぞれ t 期の生産，在庫コストを表し，M_t, C_t はそれぞれ t 期の生産，在庫量の上限を表す．f_t は t 期に生産する場合にかかる固定費用で，d_t は t 期の需要量を表す．$\mathcal{T} = \{1, 2, \cdots, T\}$ とする．

$f = (f_t)_{t \in \mathcal{T}}$,$y = (y_t)_{t \in \mathcal{T}}$,$\hat{c} = (c_t)_{t \in \mathcal{T}}$,$x = (x_t)_{t \in \mathcal{T}}$,$\hat{h} = (h_t)_{t \in \mathcal{T}}$,$I = (I_t)_{t \in \mathcal{T}}$ とおき，さらに簡単のため，連続変数を $z = (x, I)$, その係数ベクトルを $\hat{k} = (\hat{c}, \hat{h})$ と表す．そのとき，他の定数行列とベクトルを適当に定義すると，問題 (2) は以下のように表すことができる．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \hat{k}^T z + f^T y \\ \text{subject to} & Az + Gy = b \\ & z \geq 0, y \in \{0, 1\}^T \end{array} \tag{3}$$

この問題に対して，次のような 2 段階の最適化を行なう．

$$\underset{y \in \{0,1\}^T}{\text{minimize}} \left\{ f^T y + \min_z \{\hat{k}^T z | Az = b - Gy, z \geq 0\} \right\} \tag{4}$$

ここで，$\hat{\psi}(y) = \min_z \{\hat{k}^T z | Az = b - Gy, z \geq 0\}$ とすると問題 (4) は以下のように表される．

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f^T y + \hat{\psi}(y) \\ \text{subject to} & y \in \{0,1\}^T\end{array} \tag{5}$$

しかしながら，$\hat{\psi}(y)$ には不確実なデータ $\hat{k}$ が含まれる．ここでデータ $\hat{k}$ の，不確実性集合を $\mathcal{U} = \{\hat{c} \mid \hat{c} = c + \delta u, \|u\| \leq 1\}, \mathcal{V} = \left\{\hat{h} \,\middle|\, \hat{h} = h + \gamma v, \|v\| \leq 1\right\}$ とする．問題 (5) に対し，ロバスト最適化手法を適用すると，$\psi(y)$ は以下のように 2 次錐計画問題の最適値として表すことができる．

$$\begin{aligned}\psi(y) &= \min_z \left\{ \max_{\hat{k}} \{\hat{k}^T z\} \,\middle|\, Az = b - Gy, z \geq 0 \right\} \\ &= \min_z \left\{ k^T z + \delta\|x\| + \gamma\|I\| \mid Az = b - Gy, \right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. z \geq 0 \right\} \\ &= \min_z \left\{ k^T z + \delta p + \gamma q \mid Az = b - Gy, \right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. z \geq 0, p \geq \|x\|, q \geq \|I\| \right\}\end{aligned}$$

p, q は新しい変数である．よって，問題 (3) は以下のように定式化することができる．

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f^T y + \psi(y) \\ \text{subject to} & y \in \{0,1\}^T\end{array} \tag{6}$$

これは非線形 0-1 計画問題であり，厳密に解くのは難しい．そのため，発見的な解法である局所探索法および多スタート局所探索法を適用する．

4 数値実験

期間は $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$ とし，係数ベクトル f, c, h, d の各成分は 区間 $[0, 10]$ の整数乱数を，連続変数 x_t，I_t の上限である定数 M_t, C_t は 区間 $[5, 20]$ の整数乱数を用いて問題例を生成する．また，問題例は問題 (2) に対し実行可能解が存在するものに限る．生成された問題例に対し，不確実性集合 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ の大きさを表すパラメータ δ, γ を変化させ問題 (7) を解く．その際，関数 $\psi(y)$ の値を計算するために 2 次錐計画問題を解く必要があるが，そのソルバとして MATLAB® の fmincon を用いた．

$(\delta, \gamma) = (0, 0)$ のとき，問題 (6) は問題 (2) に一致する．単純な局所探索法を用いた結果，複数の局所的最適解が得られた，また，初期解の選び方によっては実行不可能になった．ここで，実行不可能であるとは生成された y の近傍内に連続した複数期の需要を満たす解が存在しないことを指す．この結果より，局所探索法ではある局所的最適解に陥り，大域的な最適解を求めることができない場合があることがわかる．よって局所探索法を複数回実行する多スタート局所探索法を用い，同時に問題例の線形緩和問題を解くことで問題例の目的関数値の下界を求め，解が大きく外れていないことを確かめることとする．

(δ, γ) を同時に段階的に減少させ $(0, 0)$ に近づけたとき，多スタート局所探索法を用いて得られた解は，0-1 変数 y の値が等しい間は，連続変数 (x, I) の値は連続的に変化するが，0-1 変数 y の値が変化すると連続変数 (x, I) の値が不連続的に変化することが観測された．ある問題例に対して，(δ, γ) を変化させたとき得られる問題 (6) の最適解のふるまいを表 1 にまとめる．$(\delta, \gamma) = (0, 0)$ については問題例の係数，定数を用いて問題 (2) を線形 0-1 計画問題として解いたときの解である．

表 1　実験結果

(δ, γ)	$(0, 0)$	$(0.2, 0.2)$	$(0.3, 0.3)$	$(5, 5)$	$(50, 50)$
y_1	1	1	1	1	1
y_2	0	0	1	1	1
y_3	1	1	1	1	1
y_4	1	1	1	1	1
x_1	11.000	11.000	3.000	3.000	3.000
x_2	0.000	0.000	8.000	8.000	8.000
x_3	14.000	14.000	14.000	13.358	10.168
x_4	3.000	3.000	3.000	3.642	6.832
I_1	9.000	9.000	1.000	1.000	1.000
I_2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
I_3	4.000	4.000	4.000	3.358	0.168
I_4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
p	-	18.055	16.673	16.269	14.935
q	-	9.849	4.123	3.503	1.014

(δ, γ) の片方の値を 0 に固定し，もう片方について段階的に減少させ $(0, 0)$ に近づけたときも，(δ, γ) を同時に段階的に減少させた場合と同様に 0-1 変数 y の値が等しい間は，連続変数 (x, I) の値は連続的に変化するが，0-1 変数 y の値が変化すると連続変数 (x, I) の値が不連続的に変化することが観測された．しかし，連続変数のとる値は (δ, γ) を同時に段階的に減少させた場合とは異なることが観測された．

5 おわりに

本研究では，基本的な在庫管理問題である動的ロットサイズ決定問題において生産コストと在庫コストに不確実性が存在するとき，ロバスト最適化の手法を適用することにより，非線形 0-1 計画問題に定式化し，発見的解法を用いて解くことを提案した．さらに，提案した方法に対する数値実験を行い，求めた解に対する考察を行った．様々な形の不確実性集合を用いたロバスト最適化の検討が今後の課題である．

参考文献

[1] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, A. Nemirovski : Robust Optimizatoin. Princeton University Press，2009.

[2] 久保幹雄，小林和博，武田朗子，田中未来，村松正和：サプライ・チェイン最適化における 2 次錐最適化の応用．オペレーションズ・リサーチ，Vol. 59，No. 12，pp. 739-747，2014.

[3] H. M. Wagner, T. M. Whitin : Dynamic Version of the Economic Lot Size Model. Management Science, Vol. 5, No. 1, pp. 89-96，1958.