

# シミュレーションを用いたアメリカン・株式プットオプションの最適行使タイミングの解析

2012SE001 赤壁あまね

指導教員：福嶋雅夫

## 1 はじめに

原資産価格に応じて価値の変わる派生証券（デリバティブ）の一種にオプションがある（木島 [1, p.119]）。本研究は、現実に市場で取引されているにもかかわらず明示的な価格公式が知られていないアメリカン・プットオプションを対象に（Øksendal[3, p.283]），CRR 株価モデルにおいて、アメリカン・株式プットオプションの理論価格と最適行使時刻を算出し、コンピュータ・シミュレーションによって最適行使タイミング\*1がどのように決定されるかを観察する。次にシミュレーション結果からプットオプションの価格を評価できるとした場合、理論価格との差がどのようになるか検証する。

## 2 アメリカン・プットオプション

アメリカン・プットオプションとは、満期日  $T$  までの任意の時刻にあらかじめ定められた権利行使価格  $K$  で当該株式を売却できる権利をオプション保有者に与えるものである。ある時刻  $t \leq T$  において原株式の価格  $S_t$  が  $K$  未満であるならば、オプション保有者は当該株式を市場価格  $S_t$  で買い、行使価格  $K$  で相手に売りつける（権利行使することによって利得  $K - S_t (> 0)$  を得ることができる。したがって、時刻  $t$  でのアメリカン・プットオプションの価値は  $(K - S_t)^+ = \max\{K - S_t, 0\}$  を下回ることはない（関根 [5, pp.30-31]）。オプション保有者はこのプットオプションの価値が最大になるような行使タイミングを決定する、一種の最適停止問題に直面することになる（澤木・鈴木 [4, p.128]）。

## 3 CRR 株価モデル

時刻  $t \geq 0$  における株価を  $S_t$  で表し、 $r$  を無リスク利率、 $u$  を株価上昇率、 $d$  を下落率として、 $\hat{r} = r + 1$  とする。このとき CRR (Cox-Ross-Rubinstein) 株価モデルは

$$S_t = S_{t-1} u^{X_t} d^{1-X_t}, \quad d < \hat{r} < u, \quad 1 < \hat{r}$$

で表される。ここで、 $\{X_t\}$  は各時刻  $t$  において確率  $p$  で 1（株価上昇）、または確率  $1 - p$  で 0（株価下落）のいずれかの値を取る i.i.d なベルヌーイ確率変数  $X_t \sim Be(p)$  の列である。 $p$  は現実の株価上昇確率であるが、後述の  $p^* = \frac{\hat{r} - d}{u - d}$  はリスク中立確率である。

\*1 「最適行使タイミング」とはシミュレーションにおいて、オプション保有者が最適に振る舞うとき、実際に権利行使が起こる時刻のことである。以降は、単に行使タイミングと記す。

## 4 理論価格と最適行使時刻

CRR 株価モデルにおけるアメリカン・プットオプションの時刻  $t (\leq T - 1)$  における理論価格は終端条件を  $P_T(S_T) = (K - S_T)^+$  とする以下の再帰方程式（ベルマン方程式）

$$P_t(S_t) = \max \left\{ K - S_t, \frac{1}{\hat{r}} \left( p^* P_{t+1}(uS_t) + (1 - p^*) P_{t+1}(dS_t) \right) \right\} \quad (1)$$

を満たす（Musielala-Rutkowski[2, pp.60-61]）。時刻  $t$  以降の最適行使時刻は次式で与えられる。

$$\tau_t^* = \min \{s \in \{t, \dots, T\} | K - S_s \geq P_s(S_s)\} \quad (2)$$

## 5 シミュレーション手順

オプション保有者は最適行使時刻と権利行使できる状態に株価パスが最初に到達した時点でオプションを行使するというを前提として、以下の手順でシミュレーションを行う。

1. 一組のパラメータ  $S_0, K, u, d, T, r$  をセットし、(1) 式を用いて理論価格をバックワードに求める。
2. 次に  $t = 0$  からスタートし、1 で求めた理論価格に対し、(2) 式で定められる最適行使時刻  $\tau_t^*$  を各  $t \geq 0$  の状態  $S_t$  ごとに求める。この最適行使時刻が、最適行使タイミングの候補である。
3. ベルヌーイ分布に従う乱数を用意し、株価変動を表すパスを作る。このとき、株価上昇確率  $p$  を与えることによって乱数を発生させる。
4. 3 の手順を 10000 回繰り返し、10000 回の試行中各最適行使時刻において何回権利行使をしたかを見る。

### 5.1 $K$ と $p$ を変化させたシミュレーション

権利行使価格  $K$  を  $K = 2400, 2398, 2396, 2394$  に、またそれぞれの  $K$  に対して株価上昇確率  $p$  を  $p = 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6$  に変化させシミュレーションを行い、行使タイミングがどのような傾向を示すか観察する。これら 20 通りのシミュレーションで変化させないパラメータは共通して  $S_0 = 2400, u = 1.0003, d = 0.9995, T = 100, r = 0.0001$  とした。このとき  $p^* = 0.75$  である。

$K = 2394, p = 0.5$  とした場合のシミュレーション結果を例に取ると、1 万回の試行中、各最適行使時刻（横軸）で権利行使が起こった回数（縦軸）は図 1 のようになる。

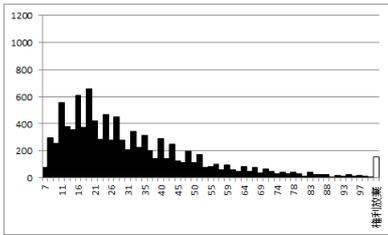


図1 権利行使回数 ( $K = 2394, p = 0.5$ )

$K, p$  の変化に対する 20 通りのシミュレーション結果の傾向を明確にするために、折れ線グラフで表示する。満期までの 100 期を縦軸に取り、全試行の 80% (1 万回の試行中 8000 回) が権利行使をした時刻を、 $K$  の各値に対し 5 つの  $p$  値 (横軸) ごとにプロットし線をつないだのが図 2 である。 $K = 2396, 2394$  では  $p = 0.6$  のときの値がないが、これは満期までに権利行使ができた試行が全試行中 8000 回未満であったことを表している。

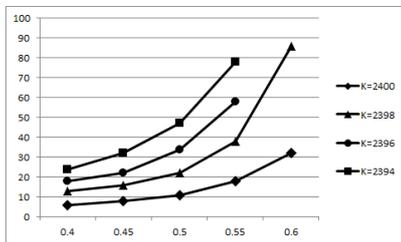


図2 全試行の 80% が権利行使をした時刻

各  $K$  に関して図 2 の傾向を見れば、どの  $K$  においても、 $p$  が小さいほど全試行の 80% が権利行使した時刻は早く、大きくなるにつれ時刻は遅くなっている。この傾向は次の要因が考えられる。権利行使可能であるのは、少なくとも株価が  $K - S_t (> 0)$  を満たすときである。 $p < 0.5$  のときは株価は下落しやすいため、速やかに行使可能な株価の状態に到達しやすく、早期に権利行使が行える。反対に  $p > 0.5$  のときは株価が上昇しやすいため、満期まで権利行使が行えない場合、満期付近でようやく権利行使が可能となる場合が多くなる。次に、どの  $p$  においても、 $K$  の値が小さいものほど 80% が権利行使した時刻は遅く、大きいものほど権利行使した時刻は早い。 $S_0 = 2400$  と設定しているので、 $K$  と  $S_0$  の差は  $K = 2400, 2398, 2396, 2394$  に対して、 $K - S_0 = 0, -2, -4, -6$  と大きくなっていく。つまり、 $K$  が  $S_0$  と比べ、小さければ小さいほど  $K - S_t > 0$  に至るには時刻 0 から株価は大きく下落しなければならず、権利行使するまでに時間がかかるのである。

## 6 アメリカン・プットオプションの価格

5.1 節のシミュレーション結果を用い、時刻 0 での価格が決定できるとすると、プットオプションの価格として

$$\frac{\sum_{\tau \in T^*} \{\hat{r}^{-\tau} (\text{利得})_{\tau} \times (\text{権利行使した回数})_{\tau}\}}{\text{全試行回数} (= 10000)} \quad (3)$$

を用いることが考えられる。ここで、 $T^*$  は最適行使時刻の集合、 $\hat{r}^{-\tau} (\text{利得})_{\tau}$  はある最適行使時刻  $\tau$  で権利行使し

た場合に得られる利得を 0 期まで割引いた値を表し、(権利行使した回数) $_{\tau}$  はシミュレーションにおいてその  $\tau$  で 1 万回中何回権利行使したかを表している。図 3 の折れ線グラフ上の点は (3) 式によるプットオプションの価格を示している。どの場合も、(3) 式で定めた価格は  $p$  の取り方によって全く違う値を取る。

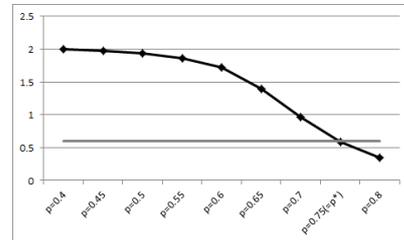


図3 理論価格と平均利得 ( $K = 2400$ )

プットオプションの真の価格 (この場合は 0 期の理論価格) は、ベルマン方程式を用いて  $p$  に依らず各  $K$  に対して一意に決定される (図の直線がプットオプションの真の価格)。(3) 式をプットオプションの価格とすると、 $p = 0.75$  以外では理論価格と大きく乖離することが分かる。使用したパラメータの値に対して  $p^* = 0.75$  であった。つまり  $p = 0.75$  のときは仮想的なリスク中立確率と現実の確率が等しくなる状況をシミュレートしたことになり、1 万回の試行でそれぞれ得られた利得を平均する (3) 式の結果は、リスク中立確率のもとで期待値をとることと同じである。よって、このケースでのみ、理論と近い値になったと考えられる。(3) 式は、 $p < p^*$  ではプットオプションの価格を過大評価、 $p > p^*$  では過小評価してしまうことになる。

## 7 おわりに

最適行使タイミングは以下の二つの傾向を示すことを明らかにした。第一は現実の株価上昇確率を表す  $p$  が小さいときは権利行使価格  $K$  の値によらずほぼ全ての試行で早期行使が最適となり、権利放棄は起こらなかった。第二は  $K$  が初期株価  $S_0$  に近いほど早期行使の傾向が強い。シミュレーションの結果を用いてアメリカン・株式プットオプションの価格を評価できるとした場合、一般の  $p$  に対しては現実をシミュレートしたものから理論価格を求めることはできず、 $p < p^*$  のときは価格を過大評価、 $p > p^*$  のときは過小評価してしまう。 $p = p^*$  においてのみ両者がほぼ等しくなる。

## 参考文献

- [1] 木島正明, 『金融工学』, 日本経済新聞社, 2002.
- [2] M. Musiela and M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, 2nd ed., Springer, 2005.
- [3] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, 5th ed., Springer, 1998.
- [4] 澤木勝茂, 鈴木淳生, 『コーポレート・ファイナンス』, ミネルヴァ書房, 2011.
- [5] 関根順, 『数理ファイナンス』, 培風館, 2007.