

Anti-lock Braking System のポリトープ表現を用いたロバスト LQ

2012SE140 前田 留依 2012SE236 杉浦 祐太

指導教員：陳 幹

1 はじめに

Anti-lock Braking System(以下, ABS) は, 緊急時のハンドル操作を有効にし, 安全性を確保する. ABS の作動場面では, 自動車の速度, 路面状態における摩擦の大きさ, 乗車人数の増減など様々な状況が考えられる. 本研究では, 質量と速度に対するロバスト性を保証するため, ポリトープ表現を用いて質量と角速度が最大の場合と最小の場合の状態空間表現を定義する. 不確かなパラメータを含む場合においても望んだ制御則を満たすコントローラが設計可能である線形行列不等式(以下, LMI)を用いてスリップ率 λ を目標値に追従することが可能な固定ゲインの制御器を設計する. 設計された制御器を用いてシミュレーションを行い効果の検証を行う. また, 本研究において, 目標スリップ率は一般的に摩擦力が最大になるとされている 0.2 とする.

2 モデリング

2.1 制御対象

本研究に用いるモデル図の作成において引用した IN-TECO 社の自動車の 1/4 モデルである ABS のモデル図を図 1 とする.

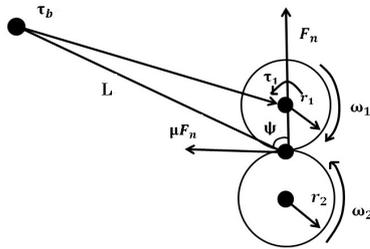


図 1 制御対象の簡略化したモデル図 [1]

図 1 の ω_1 [rad/s] は自動車の車輪を表す上部の車輪の角速度, ω_2 [rad/s] は自動車の車輪を表す下部の車輪の角速度, τ_1 [Nm] は上部の車輪にかかるブレーキトルク, τ_b [Nm] はバランスレバーに働くトルク, L [m] はバランスレバーから車輪間の接点までの距離, ψ [rad] は L と車輪間の接点までの法線のなす角, μ は車輪間の摩擦係数, F_n [N] は垂直抗力, r_1 [m] は上部の車輪の半径, r_2 [m] は下部の車輪の半径である [1]. J_1 [kgm²] は上部の車輪の慣性モーメント, J_2 [kgm²] は下部の車輪の慣性モーメントとする. 制御対象のマニュアルでは垂直抗力 F_n は以下のように導出する [1].

$$F_n = \frac{\tau_b + \tau_1}{L(\sin\psi - \mu(\lambda)\cos\psi)} \quad (1)$$

ここで, λ はスリップ率を表している. 本研究では車体の質量 m [kg] についてロバスト性をもたせるため, 車体の質量が考慮されるモデルを使用しなければならない. よって, 垂直抗力 F_n は以下のように導出する.

$$F_n = mg \quad (2)$$

ここで, g [m/s²] は重力加速度である. 図 1 のモデル図を用いた場合, 質量 m は上部にある自動車の車輪の質量を用いて計算されてしまう. そこで, 上下の車輪を入れ替える. 車体を表す下部の車輪を上部に持つてくることにより, 垂直抗力 F_n の導出に用いられる質量 m を車体の質量として導出することができる. 以上のことを考慮し, 本研究に用いるモデル図を図 2 とする.

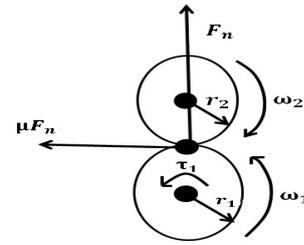


図 2 本研究にて使用するモデル図

図 2 の ω_2 [rad/s] は自動車の車体を表す上部の車輪の角速度, ω_1 [rad/s] は自動車の車輪を表す下部の車輪の角速度, r_2 [m] は上部の車輪の半径, r_1 [m] は下部の車輪の半径とする. 上部の車輪と下部の車輪を入れ替えることにより, 上部の車輪の質量を変化させたとき, 垂直抗力 F_n も増減する事を考慮する. また, 質量の増減に伴い車体の停車までの時間の変動が起こる現象を考慮するため, 上部の車輪の慣性モーメント J_2 を以下のように考える.

$$J_2 = \frac{1}{2}mr_2^2 \quad (3)$$

垂直抗力は式 (2) として考えるため, 本研究には必要のないパラメータ L , ψ , τ_b などは無いものとして考える.

2.2 モデルの比較

本研究に用いるモデルが妥当であるかについて考える. 図 2 の上部の車輪と下部の車輪の回転運動方程式を式 (4), (5) で表す. J_1 は下部の車輪の慣性モーメントである [1].

$$J_2\dot{\omega}_2 = -F_n r_2 \mu(\lambda) \quad (4)$$

$$J_1\dot{\omega}_1 = F_n r_1 \mu(\lambda) - \tau_1 \quad (5)$$

ここで、予め質量を考慮されているモデルと比較し、式 (4) が質量を考慮した式として使用できることを示す [2]。参考文献 [2] のモデル図を図 3 に示す。

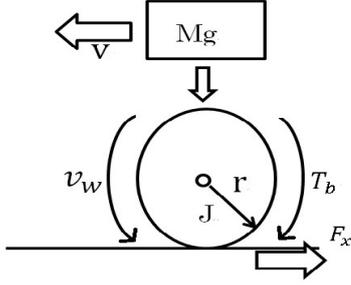


図 3 Model of wheel slip under braking[2]

図 3 の V は車体の速度、 M は車体の質量、 v_w は車輪の速度、 r は車輪の半径、 J は車輪の慣性モーメント、 T_b は車輪のブレーキトルク、 F_x は車輪と路面の間の摩擦力を表す [2]。式 (6) は、図 3 の車体の運動方程式である [2]。

$$M\dot{V} = -F_x \quad (6)$$

式 (6) の \dot{V} は車体の加速度を表している [2]。

$$F_x = \mu(\lambda)F_z, F_z = Mg \quad (7)$$

F_z は垂直抗力、 $\mu(\lambda)$ は摩擦係数を表している [2]。式 (6) を式 (7) を用いて式 (8) のように変形する。

$$\dot{V} = -\frac{\mu(\lambda)Mg}{M} \quad (8)$$

次に、式 (4) を式 (2), (3) を用いて式 (9) のように変形する。

$$r_2\dot{\omega}_2 = -\frac{2\mu(\lambda)mg}{m} \quad (9)$$

式 (9) の $r_2\dot{\omega}_2$ は上部の車輪の加速度を表している。ここで、本研究で使用する m が考慮されているか検証するために式 (8), (9) を並べて比較する。

$$\dot{V} = -\frac{\mu(\lambda)Mg}{M} \quad r_2\dot{\omega}_2 = -\frac{2\mu(\lambda)mg}{m}$$

まず二つの式のうち左辺の比較を行う。二つの式とも左辺は同じ加速度を表していることがわかる。次に右辺の比較を行う。分子にある $\mu(\lambda)$ は、二つの式とも摩擦係数を表し、各式の M と m はそれぞれの車体の質量を表し、各式の g は重力加速度を表している。以上の理由から質量を考慮している式 (8) と同じ意味を表していることがわかる。よって、式 (9) も質量を考慮しているとわかる。次に、図 2 の下部の車輪と図 3 の車輪が同じ回転運動方程式であることを示す。式 (10) は、図 3 の車輪の回転運動方程式を表す [2]。

$$\frac{J}{r}\dot{v}_w = F_x r - T_b \quad (10)$$

式 (10) の \dot{v}_w は車輪の加速度を表し、 $\frac{\dot{v}_w}{r}$ は角加速度を表す [2]。式 (7) より式 (10) を以下のように変形する。

$$\frac{J}{r}\dot{v}_w = \mu(\lambda)F_z r - T_b \quad (11)$$

ここで、図 2 の下部の車輪と図 3 の車輪が同じ回転運動方程式であることを示すために式 (5), (11) を並べて比較する。

$$J_1\dot{\omega}_1 = \mu(\lambda)F_n r_1 - \tau_1 \quad \frac{J}{r}\dot{v}_w = \mu(\lambda)F_z r - T_b$$

まず、二つの式のうち左辺の比較を行う。二つの式とも同じ慣性モーメントと角加速度の積である。次に右辺の比較を行う。二つの式とも摩擦力と車輪の半径の積からブレーキトルクを引いていることがわかる。これらから、式 (5), (11) が同じ運動を表していることがわかる。

2.3 微分方程式

本研究では、車輪の速度と車体の速度の差によって生じるスリップ率 λ を式 (12) のように表す [1][3]。

$$\lambda = \frac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{r_2\omega_2} \quad (12)$$

車輪間の摩擦係数 $\mu(\lambda)$ は式 (13) とする [1]。

$$\mu(\lambda) = \frac{w_4\lambda^q}{a + \lambda^q} + w_3\lambda^3 + w_2\lambda^2 + w_1\lambda \quad (13)$$

このとき、 a, q, w_1, w_2, w_3, w_4 は以下のとおりである [1]。

$$\begin{aligned} a &= 2.57 \times 10^{-4}, & q &= 2.10 \\ w_1 &= -4.24 \times 10^{-2}, & w_2 &= 2.94 \times 10^{-10} \\ w_3 &= 3.51 \times 10^{-2}, & w_4 &= 0.407 \end{aligned}$$

スリップ率の微分 $\dot{\lambda}$ は、式 (4), (5), (12) より式 (14) となる。

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\frac{1}{\omega_2} \left\{ \frac{r_1^2}{J_1 r_2} F_n \mu(\lambda) + \frac{1}{J_2} (1 - \lambda) F_n r_2 \mu(\lambda) \right\} \\ &\quad + \frac{r_1}{J_1 r_2 \omega_2} \tau_1 \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 λ^* を目標スリップ率とし、 τ_1^* を目標スリップ率を維持し続けるためのブレーキトルクとする。平衡点を (λ^*, τ_1^*) として、式 (14) をテイラー展開し線形化する。

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &\simeq \dot{\lambda}(\lambda^*, \tau_1^*) + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda^*} (\lambda - \lambda^*) + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \tau_1} \Big|_{\tau=\tau_1^*} (\tau_1 - \tau_1^*) \\ &= -\frac{1}{\omega_2} \left\{ \frac{r_1^2}{J_1 r_2} F_n \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu(\lambda^*) + \frac{1 - \lambda^*}{J_2} F_n r_2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu(\lambda^*) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{J_2} F_n r_2 \mu(\lambda^*) \right\} (\lambda - \lambda^*) + \frac{1}{\omega_2} \frac{r_1}{J_1 r_2} (\tau_1 - \tau_1^*) \end{aligned} \quad (15)$$

式 (15) を式 (16) の形として置く。

$$\dot{\lambda} = \frac{\alpha}{\omega_2} (\lambda - \lambda^*) + \frac{\beta}{\omega_2} (\tau_1 - \tau_1^*) \quad (16)$$

式 (15), (16) より α, β は以下の通りとなる.

$$\alpha = - \left\{ \frac{r_1^2}{J_1 r_2} F_n \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu(\lambda^*) + \frac{1 - \lambda^*}{J_2} F_n r_2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu(\lambda^*) - \frac{1}{J_2} F_n r_2 \mu(\lambda^*) \right\}$$

$$\beta = \frac{r_1}{J_1 r_2} \quad (17)$$

2.4 状態方程式の導出

状態変数 x を式 (18), 入力 u を式 (19) と定義する [4].

$$x = [x_1 \quad x_2]^T = \left[\int (\lambda - \lambda^*) dt \quad \lambda - \lambda^* \right]^T \quad (18)$$

$$u = \tau_1 - \tau_1^* \quad (19)$$

状態方程式は式 (20) とする.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (20)$$

このとき, 行列 A, B は以下のようになる.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha}{\omega_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{\omega_2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

3 ポリトープ表現

質量 m が変動することによって変動するパラメータは式 (2), (3) より F_n, J_2 の二つである. α における質量 m が最大のときを α_{max} , 最小のときを α_{min} とする. また, 角速度が最大のときを ω_{2max} , 最小のときを ω_{2min} とする. 行列 A の質量が最大, 角速度が最大のときを A_{max_max} , 質量が最小, 角速度が最大のときを A_{min_max} , 質量が最大, 角速度が最小のときを A_{max_min} , 質量が最小, 角速度が最小のときを A_{min_min} とする. また, 行列 B の角速度が最大のときを B_{max} , 角速度が最小のときを行列 B_{min} とする.

$$A_{max_max} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha_{max}}{\omega_{2max}} \end{bmatrix}, A_{min_max} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha_{min}}{\omega_{2max}} \end{bmatrix}$$

$$A_{max_min} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha_{max}}{\omega_{2min}} \end{bmatrix}, A_{min_min} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha_{min}}{\omega_{2min}} \end{bmatrix}$$

$$B_{max} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{\omega_{2max}} \end{bmatrix}, B_{min} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{\omega_{2min}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

4 最適レギュレータと LMI

状態フィードバックゲインを K とする. よって, 式 (20) は式 (23) のようになる.

$$\dot{x} = (A + BK)x \quad (23)$$

LMI 条件式で表すため, 式 (24) の評価関数 J_ϵ を最小にする [4].

$$J_\epsilon = \int_0^\infty \{x^T(t)(Q + \epsilon I)x(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt \quad (24)$$

ここで, 対称行列 Q, R は重み行列であり, 対称行列 Q, R の条件を式 (25) に示す. ϵ は微小な正の数である. これに相当する式 (26) のリッカチ方程式から正定対称解 $P = P_{opt}$ を求め, 状態フィードバックゲイン K_{opt} とすることで式 (27) を得ることができる. ここでの P_{opt}, K_{opt} は最適レギュレータ問題における解を表す. 式 (27) を用いて式 (24) を最小化する [4].

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, Q = Q^T \succ 0, R = R^T \succ 0 \quad (25)$$

$$He[PA] - PBR^{-1}B^T P + Q + \epsilon I = 0 \quad (26)$$

$$K = K_{opt} := -R^{-1}B^T P_{opt} \quad (27)$$

また, 式 (26) を式 (27) を用いて書きかえるとリッカチ方程式 (28) を得ることができる [4].

$$He[P_{opt}(A + BK_{opt})] + K_{opt}^T R K_{opt} + Q + \epsilon I = 0 \quad (28)$$

また, K_{opt}, P_{opt} をそれぞれ K, P と置き換え不等式条件で表すことにより, リッカチ不等式 (29) を得る [4].

$$He[P(A + BK)] + K^T R K + Q = -\epsilon I < 0 \quad (29)$$

このとき, 行列 P は $P = P^T > 0$ を満たす. $X = P^{-1}$, $F = KX$ と定義し, 式 (29) について変数変換を行う. 式 (29) を変数変換し, にシュールの補題を適用することで LMI 化する [4].

$$\begin{bmatrix} -He[AX + BF] & XQ_h^T & F^T R \\ Q_h X & I & O \\ RF & O & R \end{bmatrix} \succ 0 \quad (30)$$

式 (22), (30) を用いて LMI 条件式の導出を行う.

$$\begin{bmatrix} -He[A_{max_max}X + B_{max}F] & XQ_h^T & F^T R \\ Q_h X & I & O \\ RF & O & R \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} -He[A_{min_min}X + B_{min}F] & XQ_h^T & F^T R \\ Q_h X & I & O \\ RF & O & R \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} -He[A_{max_min}X + B_{max}F] & XQ_h^T & F^T R \\ Q_h X & I & O \\ RF & O & R \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} -He[A_{min_max}X + B_{min}F] & XQ_h^T & F^T R \\ Q_h X & I & O \\ RF & O & R \end{bmatrix} \succ 0$$

$$X \succ 0 \quad (31)$$

ここで Q_h は $Q = Q_h^T Q_h$ を満たす正方行列である. また, $X^{-1} < Z$ を満たす対称行列 Z を導入し, シュールの補題を適用することで式 (32) を得られる.

$$\begin{bmatrix} Z & I \\ I & X \end{bmatrix} \succ 0 \quad (32)$$

式 (31), (32) を LMI 条件として, これらを満たす $X = X^T > 0$, F , Z が存在する範囲で線形目的関数である $\text{trace}[z]$ を最小化する. このとき得られる状態フィードバックゲイン K は任意の質量に対して式 (24) の評価関数を小さくする. そこで, 適切な重み行列 Q , R を定め, 状態フィードバックゲイン K を定めた.

$$K = [-1.1753 \times 10^4 \quad -0.0048 \times 10^4]$$

5 シミュレーションと考察

本研究では, 人間 1 人分の質量を 60[kg] と考え, 乗車人数が 1~4 人まで変動する場合を考える. 実際の車体を 1[t] と考えたときモデルの車体の質量は約 5[kg] なので実際の車体の質量とモデルの車体の質量の比を考慮する. それにより, 本研究で用いる乗車する人の質量は 0.3[kg]~1.2[kg] となる. よって, 本研究で用いるモデルの総質量を 5.3[kg]~6.2[kg] として考える. 求めたゲインを用いて質量を 5.3[kg], 6.2[kg] の場合を想定し, 50[km/h]~5[km/h] までのシミュレーションを行った. 図 4, 5 は総質量が 5.3[kg], 図 6, 7 は総質量が 6.2[kg] の場合のシミュレーション結果である. ここで, r_1, r_2, J_1 は以下の値である [1].

$$r_1 = 0.0995, r_2 = 0.099, J_1 = 7.53 \times 10^{-3}$$

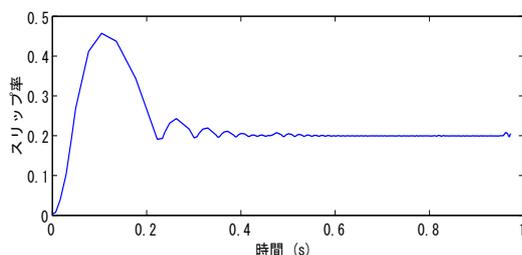


図 4 質量が 5.3[kg] の場合のスリップ率

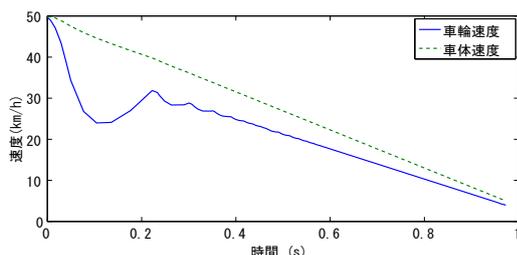


図 5 質量が 5.3[kg] の場合の車体速度と車輪速度

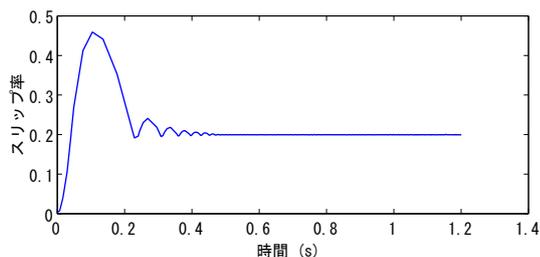


図 6 質量が 6.2[kg] の場合のスリップ率

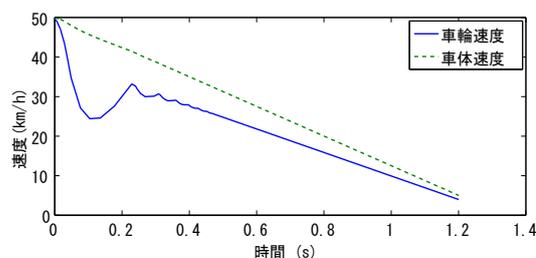


図 7 質量が 6.2[kg] の場合の車体速度と車輪速度

質量が 5.3[kg], 6.2[kg] のすべての場合において最初にスリップ率がオーバーシュートしてしまったがスリップ率を目標値である 0.2 に追従させることができた. また, 車輪速度と車体速度を減速させることができた. 問題点としては, 最初にスリップ率がオーバーシュートしてしまったために車輪の減速だけが急激に減速したことが挙げられる.

6 おわりに

本研究では, ポリトープ表現と LMI を用いて, 車体の総質量が 5.3[kg]~6.2[kg] の範囲でスリップ率を制御することを目的としたロバスト制御器設計を行った. そこから得られた状態フィードバックゲイン K を用いてシミュレーションを行った. シミュレーションの結果としては, スリップ率を 0.2 に追従させることはできたが, 最初にスリップ率が大きくオーバーシュートしてしまった. このような結果の原因としては, 最適な状態フィードバックゲインがまだ見つからないことが考えられる. 今後の課題としては, スリップ率が大きくオーバーシュートしてしまった原因を見つけ改善することが挙げられる.

参考文献

- [1] INTECO: The Laboratory Anti-lock Braking System User's Manual, <http://a-lab.ee/man/ABS-user-manual.pdf>(参照 2016-2-1)
- [2] Hiro-o YAMAZAKI, Yasushi KARINO, Takayoshi KAMADA, Masao NAGAI, Tetsuya KIMURA, "Effect of Wheel-Slip Prevention Control Using Non-linear Robust Control Theory", QR-Quarterly Report of RTRI, Vol.48, No.1, pp.22-29, Feb. 2007
- [3] 横山誠, 岩田義明, 片寄真二, 今村政道, 新部誠, "スライディングモード制御によるアンチロックブレーキシステム", 日本機械学会論文集 (C 編), 第 63 巻, pp.114-119, 1997
- [4] 川田昌克, "MATLAB/Simulink による現代制御入門", 森北出版株式会社, 2011