

# 質量変化に対する3自由度ヘリコプタのロバストLQ制御

2011SE226 三林 明央

指導教員：高見 勲

## 1 はじめに

本研究では、非線形性の強いダイナミクスを持つ3自由度ヘリコプタを用いる、対象を線形化する際に誤差が生じる、この誤差をポリトープ型のコントローラを設計することによって、ロバスト安定性を保証し、制御対象の重心移動といった特性変動に対してもロバスト性を保証する。その上で制御中に発生する特定の特性変動に起因する外乱に対しても、制御対象のロバスト性を保証する。

## 2 制御対象とモデリング

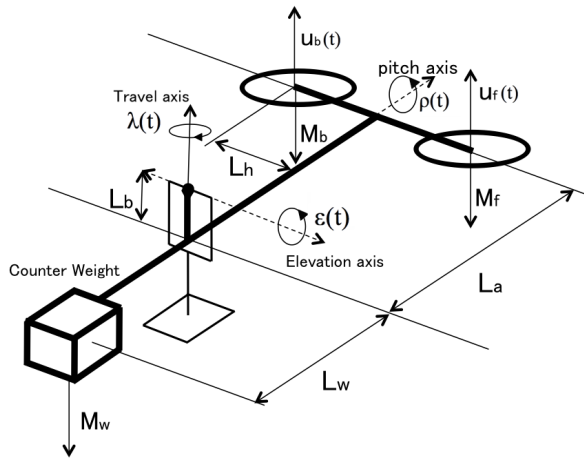


図1 3 DOF Helicopter

重力加速度を  $g$ 、フロントモータの質量を  $M_f$ 、バックモータの質量を  $M_b$ 、カウンタウェイトの質量を  $M_w$ 、支点から機体中心までの距離を  $L_a$ 、支点からカウンタウェイト中心までの距離を  $L_h$ 、支点からカウンタウェイト中心までの距離を  $L_w$ 、支点から支柱棒までの距離を  $L_b$ 、ロータの推進力定数を  $K_f$  とする。本研究で用いる3自由度ヘリコプタ実験機概略を図1に示す。実験機には推進力としてロータが2つ付いており、適切な電圧を与えることで回転し、揚力を得ることができる。図に示されたとおりトラベリング角を  $\lambda$ 、エレベーション角を  $\epsilon$ 、ピッチ角を  $\rho$  とする。前後のロータにそれぞれ最適な入力電圧を与えることで、 $\epsilon$  [rad],  $\lambda$  [rad] を目標値に追従させる制御系を設計する。

Lagrange の運動方程式を用いて3自由度ヘリコプタの非線形運動方程式を導出する。状態変数を  $x(t) = [\epsilon, \rho, \lambda, \dot{\epsilon}, \dot{\rho}, \dot{\lambda}]^T$  として、フロントモータへの入力を  $u_f$ 、バックモータへの入力を  $u_b$  として、 $u(t)$  を  $u(t) = [u_f, u_b]^T$  とする。導出した運動方程式を平衡点で線形化すると以下の状態空間表現が得られる。本研究では実験機に対してL項を打ち消すような最適な信号を予め入れておき、そこからの偏差の入力信号を用いて物体の振る舞いを制御する。

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + L \\ y(t) = Cx(t) \\ u(t) = kx(t) \end{cases}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 & 0 & e_5 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = (L_w^2 + L_b^2)M_w + (L_b^2 + L_a^2)(M_f + M_b)$$

$$e_2 = L_a L_h (M_f - M_b)$$

$$e_3 = L_b L_h (M_f - M_b)$$

$$e_4 = L_b^2 (M_f + M_b)$$

$$e_5 = L_w^2 M_w + (L_h^2 + L_a^2)(M_f + M_b)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_1 & b_1 \\ b_2 & -b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = [0 \ 0 \ 0 \ l_1 \ l_2 \ 0]^T$$

$$a_1 = gL_b M_w + gL_b M_f + gL_b M_b$$

$$a_2 = -(u_{0f} + u_{0b})\sqrt{L_a^2 + L_b^2}K_f$$

$$b_1 = \sqrt{L_a^2 + L_b^2}K_f$$

$$b_2 = K_f L_h$$

$$l_1 = -g(L_w M_w + L_a M_f + L_a M_b)$$

$$l_2 = -g(L_h M_f - L_h M_b)$$

## 3 ディスクリプタ方程式の導出

$E, A$  行列に変動パラメータが入っている。これによりシステムを状態空間表現で表した時、変動パラメータが有理関数の形で現れる。これをディスクリプタ表現を用いることで変動パラメータを1つの係数行列にまとめる。ディスクリプタ変数を用いた状態変数  $x_d$  を導入する。

$$x_d(t) = [x(t) \quad \dot{x}(t) \quad \ddot{x}(t) \quad \lambda(t)]^T$$

これを用いた、ディスクリプタ方程式は

$$E_d \dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + B_d u(t) \quad (3.0.0)$$

$$E_d = \text{diag} \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_1 & -e_2 & -e_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_4 & -e_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_6 & 0 & -e_7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} O_{3,2} \\ B \end{bmatrix}$$

と表現することができる。

## 4 拡大系の導出

本研究では  $\lambda$  と  $\epsilon$  を目標値に追従させるために、これらの変数に積分器を付加する。観測出力  $y(t)$  と目標値  $r(t)$  の偏差を  $e(t)$  とし、偏差  $e(t)$  を区間  $[0, t]$  で積分した値を  $\int e(t)dt$  とする。拡大系の状態変数を  $\tilde{x}_d(t) = [\int e_\epsilon(t)dt, \int e_\lambda(t)dt, x_d(t)]^T$  とすると拡大系は以下になる。

$$\tilde{E}_d \dot{\tilde{x}}_d(t) = \tilde{A}_d \tilde{x}_d(t) + \tilde{B}_d u(t) \quad (4.0.0)$$

$$\tilde{E}_d = \begin{bmatrix} I_{2,2} & O_{2,9} \\ O_{9,2} & E_d \end{bmatrix}, \tilde{A}_d = \begin{bmatrix} O_{2,2} & -C_d \\ O_{9,2} & A_d \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_d = \begin{bmatrix} O_{2,2} \\ B_d \end{bmatrix}, C_d = [C \ O_{3,2}]$$

## 5 LQ 最適制御

システムに対して、評価関数  $J$  を以下のように定義し、この最小化を行う。

$$J = \int_0^{\infty} (\tilde{x}_d(t)^T \tilde{Q}_d \tilde{x}_d(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (5.0.1)$$

$u(t) = K_d \tilde{x}_d(t)$ ,  $Y = K_d X$  とする時、以下の LMI をみたく  $X, Y$  が存在すれば、このシステムは安定であるといえる。求める状態フィードバックゲインは  $K_1 = Y_1 X_{11}^{-1}$  で導出される。

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, \quad Y = [Y_1 \quad 0]$$

$$\begin{bmatrix} He[\tilde{A}_d X + \tilde{B}_d Y] & X^T \tilde{Q}_d^{\frac{1}{2}T} & Y^T \\ \tilde{Q}_d^{\frac{1}{2}} X & -I & O \\ Y & O & -R^{-1} \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\begin{bmatrix} W & I \\ I & X_{11} \end{bmatrix} \succ 0 \quad trace(W) \prec \gamma$$

$$X_{11} \succ 0 \quad (P = X^{-1}, J \prec \gamma)$$

## 6 コントローラ設計

### 6.1 ポリトープ型コントローラ

ヘリコプタの機体におもりを載せた時、特性変動が起こる、また、機体をホバリングさせるための入力電圧が elevation 角度によって変動するが、これを変動パラメータとして捉え、これを定数値として取り扱う。このような誤差や特性変動分に対してもロバスト安定性を保証する。

入力  $u_{0f} + u_{0b}$ , フロントモータの質量  $M_f$ , バックモータの質量  $M_b$  の各変動範囲は以下になる。

$$u_{0f} + u_{0b} \in [u_{0f_{min}} + u_{0b_{min}}, u_{0f_{max}} + u_{0b_{max}}] \\ = [13.0, 34.0] \quad (6.1.0)$$

$$M_f \in [M_{f_{min}}, M_{f_{max}}] = [0.68, 0.73] \quad (6.1.1)$$

$$M_b \in [M_{b_{min}}, M_{b_{max}}] = [0.68, 0.73] \quad (6.1.2)$$

(6.0.13), (6.0.14), (6.0.15) よりポリトープ集合を用いてシステム行列  $\tilde{A}_d$  の端点を次のように設定する

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{d1} &= \tilde{A}_d(M_{f_{min}}, M_{b_{min}}, u_{0f_{min}} + u_{0b_{min}}) \\ \tilde{A}_{d2} &= \tilde{A}_d(M_{f_{max}}, M_{b_{min}}, u_{0f_{min}} + u_{0b_{min}}) \\ \tilde{A}_{d3} &= \tilde{A}_d(M_{f_{min}}, M_{b_{max}}, u_{0f_{min}} + u_{0b_{min}}) \\ \tilde{A}_{d4} &= \tilde{A}_d(M_{f_{max}}, M_{b_{max}}, u_{0f_{min}} + u_{0b_{min}}) \\ \tilde{A}_{d5} &= \tilde{A}_d(M_{f_{min}}, M_{b_{min}}, u_{0f_{max}} + u_{0b_{max}}) \\ \tilde{A}_{d6} &= \tilde{A}_d(M_{f_{max}}, M_{b_{min}}, u_{0f_{max}} + u_{0b_{max}}) \\ \tilde{A}_{d7} &= \tilde{A}_d(M_{f_{min}}, M_{b_{max}}, u_{0f_{max}} + u_{0b_{max}}) \\ \tilde{A}_{d8} &= \tilde{A}_d(M_{f_{max}}, M_{b_{max}}, u_{0f_{max}} + u_{0b_{max}}) \end{aligned}$$

本研究のコントローラはポリトープ型なので、各端点において安定ならば端点で囲まれた範囲においてシステムの安定性が保証できる。重み行列は試行錯誤の結果次のようになった。

$$Q = \text{diag} \{20 \ 0.2 \ 10 \ 0.1 \ 1.5 \ 1.8 \ 0.1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

$$R = \text{diag} \{0.05 \ 0.05\}$$

## 7 シミュレーションと実験結果

ここで、 $M_{f_{max}}, M_{b_{min}}$  の時、elevation 角度を 0[deg] から 15[deg] へ追従させたものを図 2 に、 $M_{f_{max}}, M_{b_{min}}$  の時、elevation 角度を 0[deg] から -10[deg] へ追従させたものを図 3 に、 $M_{f_{max}}, M_{b_{min}}$  の時 elevation 角度を 15[deg] に保ちながら traveling 角度を 0[deg] から 120[deg] へ変動させたものを図 4 に、elevation 角度を 15[deg] に保ちながら、 $M_{f_{max}}, M_{b_{min}}$  から  $M_{f_{min}}, M_{b_{min}}$  へ変動させたものを

を図 5 に示した。

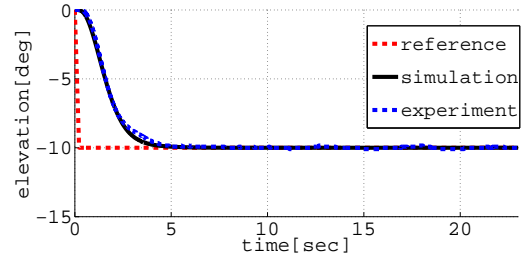


図 2 elevation 角度を 0[deg] から -10[deg] へ追従

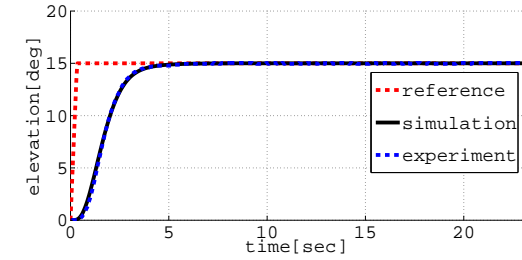


図 3 elevation 角度を 0[deg] から 15[deg] へ追従

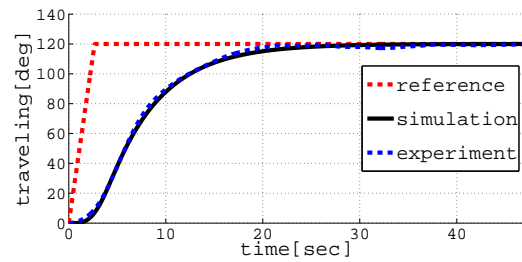


図 4 traveling 角度を 0[deg] から 120[deg] へ追従

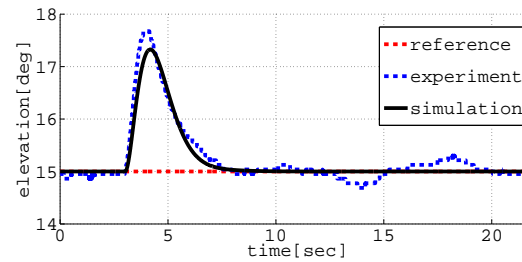


図 5 錘の投下

## 8 おわりに

本研究では、平衡点による線形近似によって、ヘリコプタのモデルを作成した。線形誤差と特性変動をポリトープ表現し、ディスクリプタ表現を用いたロバスト LQ の制御器を LMI 定式化することによってフィードバックゲインを設計した。ポリトープでシステムの安定性が保証された内部で、制御中に特性変動が生じた場合でも、安定性を保証できることが確認できた。

## 9 参考文献

- [1] 池田雅夫: Descriptor 形式に基づくシステム理論, (1985), 計測と制御 vol.7, p597-604