

二重振り子の運動

2011SE173 : 望月大輔

指導教員 : 杉浦洋

1 はじめに

二重振り子に関するラグランジュの運動方程式をたてる。それを数値的に解き、運動の二重振り子のシミュレーションを行う。初期条件を変えてカオス現象を起こす条件を調べる。二重振り子の関数 $L(t)$ を計算し、リアプノフ指数を推定する。リアプノフ指数と初期値の関係について調べる。

2 運動方程式

今回の二重振り子の運動方程式は、

$$\begin{aligned} (\theta_1 \text{ の場合}) & (m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & + m_2l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0 \\ (\theta_2 \text{ の場合}) & l_1l_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2\ddot{\theta}_2 - l_1l_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ & + gl_2 \sin \theta_2 = 0 \end{aligned}$$

とする。

運動方程式を用いて近似線形方程式は、

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)g\theta_1 &= 0 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。

3 固有振動数

振り角度が小さいときの運動の固有振動数を求めて運動シミュレーションを行う。

近似線形方程式より固有振動数の値は $l_1 = 2, l_2 = 3, m_1 = 2, m_2 = 1$ となる。 $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 1^\circ, \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0^\circ/s$ とする。

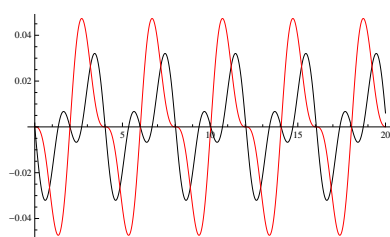


図1 θ_1 と θ_2 を合わせた図 (縦軸が θ_1 と θ_2 , 横軸が時間)

シミュレーションによれば、2つの固有振動数の角速度は ω_1 と ω_2 とすると、 $2\omega_1 = \omega_2$ となり、周期 $\frac{2\pi}{\omega_1}$ の周期運動が表れた。

結果、特徴的な運動は発見されなかった。振り子時計は、ちゃんとした周期をもち動いている。

4 カオスについて

4.1 カオスとは

カオス (混沌) という言葉は日常会話でよく耳にする。これは普通は秩序ないしは予測不可能の欠如を意味する。

また、天気が予測不可能だとか、上昇する煙の粒子がどう運動するか予測できないとか、あるいは株価の変動は混沌としてるなどとも言う。カオスの数学的な概念の背後にあるものは予測不可能性である。しかし、力学系の不規則で複雑な振る舞いが広く関心を持たれて研究されるようになってからすでに20年以上過ぎたが、現在でもなお我々のカオスに対する本質的な理解は十分であるとは言いがたい。実際、「カオス」ということに対する定義さえも未だに確立されていない [1]。

4.2 カオスの例

30年近く前にアメリカの気象学者 エドワード・ローレンツは“決定論的乱流”という論文を発表し、天気のパターンは初期値に鋭敏であることをコンピュータ・シミュレーションにより示した。当時、初期値の非常に小さな変化がその後の天気に大きな影響を与えるという考えは驚くべき発見であった。エドワード・ローレンツは大気の状態を単純化して表した方程式をコンピュータで計算した。ある程度計算を進行させ、プリントアウトされた途中の計算結果を見たエドワード・ローレンツは、先程の計算と全く異なる結果になっていることを見て驚いた。当然エドワード・ローレンツもプログラムのバグや機械の故障を疑ったが、調べた結果そのようなものはなかった。エドワード・ローレンツが見た結果の大きな違いこそ、初期値鋭敏性だったのである [1]。

4.3 初期値鋭敏性

カオスとは大雑把に言えば力学系における軌道の「予測困難な」不規則な振る舞いのことであるとされている。すなわち初期値が必然的に含むであろう誤差が力学系の時間発展と共に急速に増大し、長時間にわたる予測を困難にすることを指している。すなわち、初期値を少し変えただけで全く違った結果を生み出すことである [2]。

4.4 リアプノフ指数

力学系においてごく接近した軌道が離れていく度合いを表す量である。定量的に表すと、位相空間内の2つの軌道の初期の距離を δZ_0 としたとき、ある時点 t における距離は次のように表せる [1], [2]。

$$|\delta Z(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta Z_0| \quad (1)$$

離れていく度合いは、初期のベクトルの向きの違いによっても変わってくる。従って、位相空間の次元数で分解した“リアプノフ指数のスペクトル”が存在する。そのうち最大リアプノフ指数は力学系の予測可能性を決定づける値である。正の最大リアプノフ指数は系がカオス的であることを示唆する基準の一つである。

5 Mathematica による数値実験

二重振り子が行う運動のシミュレーションを Mathematica 上に実現し、数値実験を行った。この問題で得られた、運動方程式に初期値を与える。質量、糸の長さ、固有振動数で求めた初期値を用いて、 $l_1 = 2, l_2 = 3, m_1 = 2, m_2 = 1$ とし、重力加速度を $g=9.8$ とし、値を固定する。それ以外の変数 $\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2$ のそれぞれに初期値を与え、二重振り子の変化について調べる。この問題の初期値の異なる解を $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t)), \tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\tilde{\theta}_1(t), \tilde{\theta}_2(t), \dot{\tilde{\theta}}_1(t), \dot{\tilde{\theta}}_2(t))$ とする。初期値基準モデルと初期値に誤差を加えたモデル誤差の変化について詳しく分析する。今回は微分方程式の数値解法には Mathematica の NDSolve を用いた。

カオス性の判定

正のリアプノフ指数を持つ。また 1000 秒実験して関数 $L(t)$ が 0 に到達する。

$\delta\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}(t) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)$ とするとき、ある $\lambda > 0$ について式 (1) より

$$\|\delta\boldsymbol{\theta}(t)\| \approx e^{\lambda t} \|\delta\boldsymbol{\theta}(0)\| \quad (2)$$

$\|\delta\boldsymbol{\theta}(t)\|$ は誤差で、 $\|\delta\boldsymbol{\theta}(0)\|$ は初期誤差である。

実験では $\delta\boldsymbol{\theta}(0)$ の成分を区間 $10^{-5}[-1, 1]$ の乱数として与え、

$$L(t) = \log \|\delta\boldsymbol{\theta}(t)\| \quad (3)$$

の値を観察する。関数 $L(t)$ のグラフの傾き $\lambda > 0$ としてリアプノフ指数を観察できる。

ただし振り子の運動は有限の空間とエネルギーにとどまるので、 $L(t) = 1$ に到達した時点で観察を打ち切る。

6 数値実験

振り子の振幅が小さいときは、図 1 から図 3 で見たような現象は二つの固有振動の和に過ぎず、カオスは起こらない。カオスが起これるとすれば、それは初期値に依存する。それを調べるために、基準解 $\boldsymbol{\theta}(t)$ の初期値を $\theta_1(0) = \theta_2(0), \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ として、実験する。

$\theta_1(0) = \theta_2(0) = 69.8^\circ, \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0^\circ/s$ の場合
関数 $L(t)$ が 0 に到達しなかった。カオスが発生しない。

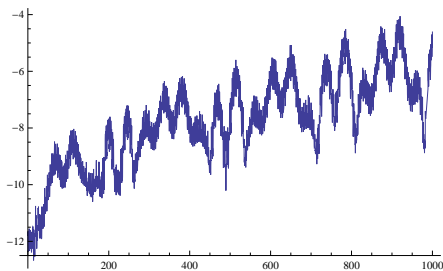


図 2 関数 $L(T)$ のグラフ。横軸は時間 t

$\theta_1(0) = \theta_2(0) = 69.9^\circ, \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0^\circ/s$ の場合

図 5 の直線は傾き 0.0155 の直線であり、リアプノフ指数は $\lambda=0.0155$ で、式 (1) の指数関数因子は $e^{0.0155t}$ となる。

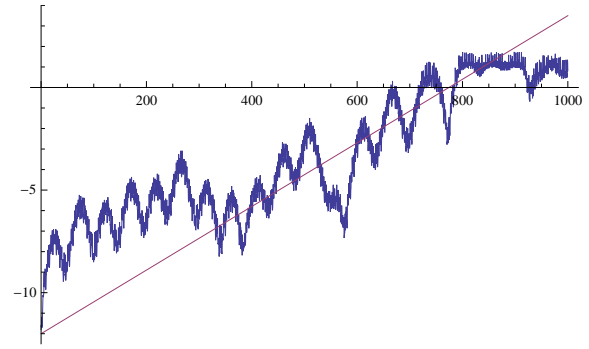


図 3 関数 $L(T)$ のグラフ。横軸は時間 t 。

関数 $L(t)$ が 0 に到達した。カオスが発生した。

$\theta_1(0) = \theta_2(0) = 180^\circ, \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0^\circ/s$ の場合

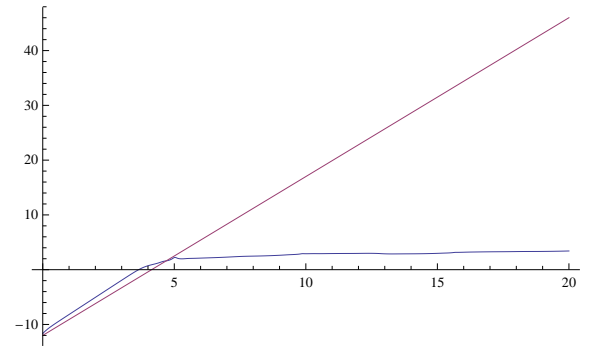


図 4 関数 $L(T)$ のグラフ。横軸は時間 t 。

図 6 の直線は傾き 2.9 の直線であり、リアプノフ指数は $\lambda=2.9$ で、式 (1) の指数関数因子は $e^{2.9t}$ となる。

7 おわりに

本研究では、二重振り子のカオスについて観察した。リアプノフ指数が指数増加していると、初期値鋭敏性が発生して、二重振り子はカオスの現象を発生することが分かった。今回の結果より、 69.8° 以下の場合カオスの現象は発見されなかった。 69.9° になるとカオスが発生する。更に、 180° のとき最大リアプノフ指数であった。カオスが発生したとき位置と速度の初期値を決めても未来を予測することは出来なかった。

今後の課題は、リアプノフ指数では $L(t)$ が 0 以上になればこの解では必然的に $L(t)$ の増大が止まり、カオス的な状態とそうでない状態を区別できなくなる。そのような状況において小藤俊幸教授は解の周波数解析を行うように勧めたが、時間がなくてそこまで進むことができなかった。その方向での研究が今後の課題である。

参考文献

- [1] デニー・ゲー・リック、『カオスとの遭遇』、産業図書、1995。
- [2] 國府寛司、『力学系の基礎』、朝倉書店、2000。