

ボウリングの力学的シミュレーション

2011SE155 松田諒

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

ボウリングのボールが転がる様子には様々なものがある，この様子についてコンピュータのシミュレーションで詳しく調べる．ボールの運動を支配しているのは剛体力学である．本研究では剛体力学を詳しく学び，それによりボールの状態を表す微分方程式を導出する．その微分方程式を数値的に解くことにより，コンピュータ上にストライクをとりやすいボールの軌道を再現する．

2 剛体力学

2.1 角運動量保存則

剛体の運動方程式は6個の運動方程式によって決められる．剛体の運動を定める6個の運動方程式として，重心 r_G に対する運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \sum_j \mathbf{F}_j \quad (1)$$

の x, y, z 方向の3成分と，角運動量に対する運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j) = \mathbf{N} \quad (2)$$

の x, y, z 方向の3成分の式が用いられる．

このとき外力のモーメント \mathbf{N} が常に0ならば，角運動量 \mathbf{L} は一定に保たれる．これは剛体に対する角運動量保存の法則である．

2.2 慣性モーメント

固定軸を z 軸に取り，剛体を構成する各質点 (質量 m_j) の軸からの距離を r_j とする．軸状に原点をもつ，空間に固定した円筒座標 (r_j, φ_j, z_j) を用いることにより，質点 j の角速度 $\omega = d\varphi_j/dt$ を得る．角速度 ω は各質点に共通である．また，質点 j の運動量は剛体では， $m_j r_j \omega$ であり，軸に関する角運動量は $m_j r_j^2 \omega$ であるため，軸に関する全角運動量 L_z は

$$L_z = \sum_j m_j r_j^2 \omega$$

となる．ここで，固定軸と剛体によって定まる量 I_z は

$$I_z = \sum_j m_j r_j^2 \quad (3)$$

であり，これを固定軸周りの剛体の慣性モーメントと言う．これにより角運動量は

$$L_z = I_z \omega \quad (4)$$

と表わされる．

角運動量に対する運動方程式 (2) を用いると，固定軸をもった剛体の運動方程式は

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = N_z \quad (5)$$

となる．

2.3 慣性モーメント行列

実際に3次元での慣性モーメントを導出する．角運動量ベクトル \mathbf{L} の定義は，外積を用いて，

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (6)$$

と表せる．ここで \mathbf{r} は質点の位置を表わす相対ベクトルであり，何を基準にしても構わない．また， \mathbf{p} は運動量ベクトルである． \mathbf{p} の定義は $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ と表せるが，この速度ベクトル \mathbf{v} は角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を使って

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (7)$$

となる．まとめると \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ の間に，

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (8)$$

が成り立ち，

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - m(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} \quad (9)$$

となる．

位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とし上の式を成分に分けて表現する．

$r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ として，

$$L_x = mr^2\omega_x - m(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)x$$

$$L_y = mr^2\omega_y - m(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)y$$

$$L_z = mr^2\omega_z - m(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)z$$

これを行列で表すと，以下のような対称行列ができる．

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m(y^2 + z^2) & -myx & -mzx \\ -mxy & m(x^2 + z^2) & -mxy \\ -mzx & -myz & m(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

ここに出てきた行列 \mathbf{I} が \mathbf{L} と $\boldsymbol{\omega}$ の関係を正しく結ぶものであり，慣性モーメント I の3次元版としての意味をもつものであり，これを慣性モーメント行列と呼ぶ．

3 運動方程式

摩擦力を計算する関数を導く。レーンとの接地点の速度を

$$\mathbf{u}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (-a\mathbf{z}v)$$

とすると、摩擦力を計算する関数は、

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}) = -Mg(\mu_1 \frac{v}{\|\mathbf{v}\|} + \mu_2 v) \quad (10)$$

となる。

次に慣性行列を計算する関数を導く。

I をボール座標軸ベクトルが $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ のときの慣性行列とする。

$$\mathbf{i} = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{z}$$

のとき、

$$I_0 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

であり、これは主軸が直立していることを表す。また、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ に写す直交変換を T とすると、

$$I = T^T I_0 T \quad (11)$$

となる。

また、慣性行列の逆行列は、

$$I_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} \end{pmatrix}$$

より、

$$I^{-1} = T^T I_0^{-1} T$$

次に角速度ベクトルを計算する関数を導く。

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

より、

$$\boldsymbol{\omega} = I^{-1}\mathbf{L} \quad (12)$$

で計算できる。

以上より、以下の運動方程式が立てられる。

[角運動量の運動方程式]

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = (-a\mathbf{z}) \times \mathbf{F} \quad (13)$$

ここで $-a\mathbf{z}$ は重心から接地点のベクトルを、 \mathbf{F} は摩擦力を表し、 $(-a\mathbf{z}) \times \mathbf{F}$ はモーメントである。

[重心の運動方程式]

$$M \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \mathbf{F} \quad (14)$$

重心はボールの中心で、 \mathbf{v} はボールの中心速度なので微分すると重心の加速度になる。

[位置の方程式]

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b} = \mathbf{v} \quad (15)$$

\mathbf{b} はボールの中心座標なので、微分すれば速度になる。

[回転座標の方程式]

$$\frac{d}{dt}\mathbf{i} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$$

これらの4つの運動方程式を用いてボールの運動を Mathematica でシミュレーションしたところ、摩擦係数や初期値をそれぞれ変えることにより、様々な軌道を描くボールを再現することができた。

4 終わりに

本研究では、剛体力学について詳しく学び、それによりボールの状態を表す微分方程式を導出した。その微分方程式を数値的に解くことにより、Mathematica でプログラムを組みコンピュータ上にボールの運動を再現した。横方向の回転をかけると摩擦係数の大きさ、すなわちオイルの量によってボールの運動が大きく変わることがわかった。ボウリングの大会では投球練習があるが、そこでいかにオイルの量やオイルの塗られている範囲を把握することが重要だということがわかった。また、試合中にもボールがオイルを吸ってレーン状況が刻々と変化していくので、1投1投の微妙なボールの変化を見つけて、対応していくことが重要である。そして様々なレーンに対応できるよう、回転数や角速度を変える技術が必要になってくる。実験結果は、ボールのレーンの上運動は、オイルが塗られている範囲ではほとんど曲がらず滑っていくことを示唆している。今後、オイルがなくなる箇所をよく観察し、投球方法を調整してストライクを出していきたい。また、ピンをどのように弾けばストライクが出やすいかを研究する必要がある。

5 参考文献

参考文献

- [1] 十河清・和達三樹・出口哲生：『ゼロからの力学1』。岩波書店、東京、2013。
- [2] 十河清・和達三樹・出口哲生：『ゼロからの力学2』。岩波書店、東京、2013。