

小ハロー軌道の生成と維持

2011SE297 山本大智 2011SE098 岩井勇磨

指導教員：市川朗

1 はじめに

月と地球、もしくは地球と太陽といった二天体と宇宙機による三体問題では、天体の質量に対して宇宙機の質量は無視できるほど微小である。したがって、宇宙機が天体の運動に与える影響も無視でき、宇宙機は二天体による既存の重力場内を運動していると考えることができる。この重力場の力学的平衡点はラグランジュ点と呼ばれ L1 から L5 まで存在することが知られており、これらの点の周りをまわる周期軌道をハロー軌道と呼ぶ。月の自転周期は地球の周囲を回る公転周期と同期しているため、月の裏側を地球から観測することが出来ない。そのため、本研究では月の裏側を通る小ハロー軌道を生成し、月の裏側に宇宙機を維持する軌道制御について考える。

2 軌道方程式の導出

2.1 宇宙機の運動方程式

慣性座標系の原点を $O-\{\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\}$ とし、地球と月と宇宙機の制限三体問題を考える。慣性座標系における原点 O から地球、月、宇宙機の位置ベクトルをそれぞれ \mathbf{R}_e , \mathbf{R}_M , \mathbf{R}_m とする。ここで、 M_e , M , m はそれぞれ地球、月、宇宙機の質量であり、 G は万有引力定数、月と地球の重心を原点とする回転座標系を $o_b - \{\mathbf{i}_b, \mathbf{j}_b, \mathbf{k}_b\}$ とする。また、 \mathbf{r}_e と \mathbf{r} はそれぞれ地球、月から宇宙機への位置ベクトルであり、 $D = |\mathbf{D}|$, $r_e = |\mathbf{r}_e|$, $r = |\mathbf{r}|$ とおく。 o_b から宇宙機への位置ベクトルを \mathbf{R} とする。このとき、宇宙機の運動方程式

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{GM_e}{r_e^3}\mathbf{r}_e - \frac{GM}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{u}, \quad (1)$$

が得られる。ここで、 \mathbf{u} は制御加速度である。地球と月の運動は共通重心のまわりの円運動であると仮定し、

パラメータの値を

$$D_0 = 384,748 \text{ [km]}$$

$$M_e = 81.2801M$$

$$\mu = G(M_e + M) = 403402[\text{km}^3/\text{s}^2]$$

$$n = (\mu/D_0^3)^{1/2} = 2.661365 \times 10^{-6} \text{ [rad/s]}$$

$$\rho = M/(M_e + M) = 0.01215$$

$$D_1 = \rho D_0 = 4674 \text{ [km]}$$

$$D_2 = (1 - \rho)D_0 = 380,072 \text{ [km]}$$

とする。 D_0 は、地球の中心から月の中心までの距離であり、 n は円運動の角速度である。 D_1 と D_2 はそれぞれ重心と地

球、月の間の距離である。ここで回転座標系より

$$\begin{aligned} \ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2X &= -\frac{GM_e}{r_e^3}(X + D_1) \\ &\quad - \frac{GM}{r^3}(X - D_2) + u_x, \\ \ddot{Y} + 2n\dot{X} - n^2Y &= -\frac{GM_e}{r_e^3}Y - \frac{GM}{r^3}Y + u_y, \\ \ddot{Z} &= -\frac{GM_e}{r_e^3}Z - \frac{GM}{r^3}Z + u_z, \end{aligned} \quad (2)$$

が得られる。ここでは、 r_e , r を、

$$r_e = [(X + D_1)^2 + Y^2 + Z^2]^{1/2},$$

$$r = [(X - D_2)^2 + Y^2 + Z^2]^{1/2},$$

とおく。

2.2 方程式の無次元化

計算を簡単にする為に、 $\tau = t/(1/n)$, $\bar{X} = X/D_0$, $\bar{Y} = Y/D_0$, $\bar{Z} = Z/D_0$, $\bar{u}_x = u_x/n^2D_0$, $\bar{u}_y = u_y/n^2D_0$, $\bar{u}_z = u_z/n^2D_0$, $\bar{r}_e = r_e/D_0$, $\bar{r} = r/D_0$ とし、(2) 式を無次元化する。' は τ に関する微分を意味する。(2) 式より、

$$\begin{aligned} \bar{X}'' - 2\bar{Y}' - \bar{X} &= -\frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}(\bar{X} + \rho) - \frac{\rho}{\bar{r}^3}(\bar{X} - 1 + \rho) + \bar{u}_x, \\ \bar{Y}'' + 2\bar{X}' - \bar{Y} &= -\frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{Y} - \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Y} + \bar{u}_y, \\ \bar{Z}'' &= -\frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{Z} - \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Z} + \bar{u}_z, \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。ここで、 \bar{r}_e , \bar{r} を

$$\bar{r}_e = [(\bar{X} + \rho)^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2]^{1/2},$$

$$\bar{r} = [(\bar{X} - 1 + \rho)^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2]^{1/2},$$

とおく。

2.3 方程式の線形化

以下では、小ハロー軌道生成のための方程式を導出する。(3) 式はラグランジュ点と呼ばれる静止点 L_i を持ち、

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}(\bar{X} + \rho) + \frac{\rho}{\bar{r}^3}(\bar{X} - 1 + \rho), \\ \bar{Y} &= \frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{X} + \frac{\rho}{\bar{r}^3}(\bar{Y}), \\ \bar{Z} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

で与えらる。月の裏側のラグランジュ点を $L_2 = (l_2(\rho), 0, 0)$ と置く。(4) 式は、 ρ の値を変えることによって、一般の三体システムの定常点も求め

られ、地球一月系では $\rho = 0.0121536$ で $(l_1, l_2, l_3) = (0.83692, 1, 15568, -1, 00506)$ となる。(3) 式の L_2 点周りで一次の項までテイラー展開し、線形化した方程式を以下に示す。

$$\begin{aligned}\bar{X}'' - 2\bar{Y}' - (2\sigma + 1)\bar{X} &= \bar{u}_x, \\ \bar{Y}'' + 2\bar{X}' + (\sigma - 1)\bar{Y} &= \bar{u}_y, \\ \bar{Z}'' + \sigma\bar{Z} &= \bar{u}_z,\end{aligned}\quad (5)$$

これを用いて、小ハロー軌道を生成する。ここで $\sigma = \frac{\rho}{(l_2(\rho)-1+\rho)^3} + \frac{1-\rho}{(l_2(\rho)+\rho)^3} = 3.19043$ である。

3 周波数制御

面内運動、面外運動はそれぞれ周期解をもつが、(5) 式の 3 次元運動の周期解は存在しない。本研究では常に地球の裏側を安定的に観測するために、解の周波数を面内運動の ω_{xy} 、面外運動の ω_z 、または周波数 $\omega = 2$ に合わせ、三次元周期解を生成する制御を行う。(5) 式の状態方程式は、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [\bar{X} \quad \bar{Y} \quad \bar{X}' \quad \bar{Y}' \quad \bar{Z} \quad \bar{Z}']^T, \\ \mathbf{u} &= [\bar{u}_x \quad \bar{u}_y \quad \bar{u}_z]^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\sigma + 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sigma & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma & 0 \end{array} \right], \\ &\equiv \text{diag}[\mathbf{A}_{in}, \mathbf{A}_{out}], \\ \mathbf{B} &= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right], \\ &\equiv \text{diag}[\mathbf{B}_{in}, \mathbf{B}_{out}],\end{aligned}$$

とする。面内運動、面外運動のシステム行列の特性方程式は、

$$\begin{aligned}|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{in}| &= \lambda^4 - (\sigma - 2)\lambda^2 - (2\sigma + 1)(\sigma - 1) = 0, \\ |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_{out}| &= \lambda^2 + \sigma = 0,\end{aligned}$$

となる。

面内運動の周波数は解の虚数根である $\omega_{xy} = 1.86265$ であり、面外運動は周波数 $\sqrt{\sigma} = \omega_z = 1.78618$ の正弦波である。周波数制御をするにあたり、本研究では 3 つの周波数に合わせる制御を行った。ここでは、任意の周波数 ω での周波

数制御を例にあげる。初めに、(5) 式の解を、

$$\begin{aligned}\bar{X}(\tau) &= -(\bar{a}/k) \sin \omega_{xy} \tau, \\ \bar{Y}(\tau) &= -\bar{a} \cos \omega_{xy} \tau, \\ \bar{Z}(\tau) &= \bar{a} \sin \omega_z \tau,\end{aligned}\quad (6)$$

の形で求めると、

$$k = \frac{\omega^2 + 2\sigma + 1}{2\omega}$$

となる。このとき特殊解は (6) 式 of 自由運動を満たし、図 2 のようなリサージュ軌道を形成する。

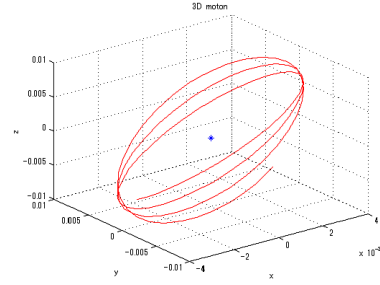


図1 リサージュ軌道

$\bar{a} = 0.0091$ のとき、最大の振幅は 3500[km] となり、この軌道上の宇宙機は地球から観測することができる。なお、 (\bar{Y}, \bar{Z}) 運動は、地球からの概観である。

周期解を求めるため、まず面外運動の周波数を面内運動の周波数に合わせる制御をおこなう。フィードバック制御により、特殊解が (5) 式の第 2 式を満たすためには、

$$\bar{u}_y = f \bar{Y},$$

となる。ここで、

$$f = \frac{2\omega_{xy}}{k} + \sigma - 1 + \omega_{xy}^2,$$

である。面外運動の周波数を面内運動の周波数に合わせるには、

$$\bar{u}_z = -(\omega_{xy}^2 - \omega_z^2) \bar{Z},$$

とおく。以上より (6) 式が満たされる、

4 シミュレーション

4.1 最適レギュレータ

(6) 式の状態方程式より、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

である。そのときの評価関数は以下に表す。

$$J(\mathbf{u}; \mathbf{x}_0) = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt,$$

\mathbf{Q} は状態にかかる重みであり、 6×6 の半正定対称行列である。また、 \mathbf{R} は入力にかかる重みであり、 3×3 の正定対

称行列である。本研究では Q を固定して考えているため、評価関数を最小にする $u(t)$ を求める。そのために以下の代数リッカチ方程式より適切な X を求める。

$$A^T X + X A + Q - X B R^{-1} B^T X = 0,$$

フィードバックゲイン K は上の式より、

$$K = R^{-1} B^T X,$$

となる。

4.2 誤差方程式

制御軌道を $\dot{x} = Ax + Bu$, 目標軌道を $\dot{x}_f = Ax_f + Bu_f$ とするとき、制御軌道と目標軌道の誤差は、

$$e = x - x_f$$

となり、

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ax + Bu - Ax_f - Bu_f \\ &= Ae + B(u - u_f), \end{aligned}$$

となる。ここで、フィードバックを $u - u_f = -Ke$ とすると、

$$\dot{e} = (A - BK)e,$$

となる。

4.3 維持制御

以下のシミュレーションでの目標軌道（維持軌道）と制御軌道の初期値はそれぞれ、

$$\begin{aligned} x_{f0} &= [0 \quad \bar{a} \quad \bar{a}\omega/k \quad 0 \quad 0 \quad \bar{a}\omega]^T \\ x_0 &= [0 \quad \bar{a} \quad \bar{a}\omega/k \quad 0 \quad 0 \quad \bar{a}\omega]^T \end{aligned}$$

であり、 $Q = 10 \times I_6$ とする。図2は周波数制御をおこなった目標軌道であり4周期目までは収束しているが、4周期目以降で発散していくことが分かった。

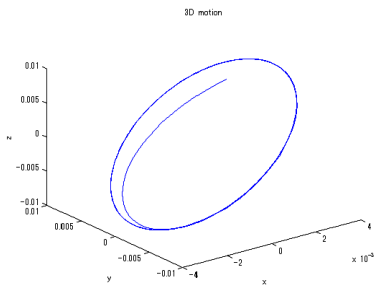


図2 周波数制御 ($\omega = \omega_{xy}$ 4周期以降発散)

目標軌道を維持させるため、4周期までに目標軌道の値を初期値に戻す制御を行う必要がある。この制御結果を図4に示す。

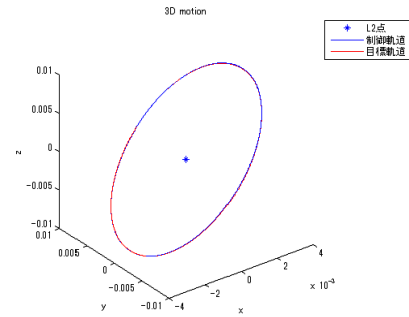


図3 維持制御 ($\omega = \omega_{xy}$)

4.4 移行制御

制御対象を L2 点から目標軌道へ移行させる制御を行う。3つの周波数に対して r を変えたときのノルムの比較を行う。ここでは、誤差が 10^{-5} 以内のとき収束とした。

表1 3つの周波数における最小のノルム

ω	ノルム
xy	2.6119×10^{-2}
z	2.9371×10^{-2}
2	3.8985×10^{-2}

表より、移行制御において最小のノルムの周波数は $\omega = \omega_{xy}$ であった。このときの軌道のシミュレーション結果を図4に示す。

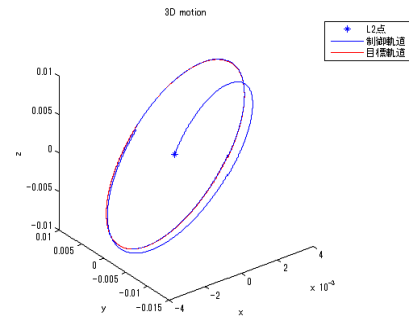


図4 移行制御 ($\omega = \omega_{xy}$)

4.5 出力レギュレーション

これまで生成してきたグラフを出力レギュレーション理論を用いて生成する。一般的な周期軌道を考えると

$$w_1(\tau) = w_{10} \cos \omega_1 \tau + s_1 \frac{w_{20}}{\omega_1} \sin \omega_1 \tau$$

$$w_2(\tau) = \frac{1}{s_1} (-w_{10} \omega_1 \sin \omega_1 \tau + s_1 w_{20} \cos \omega_1 \tau)$$

$$w_3(\tau) = w_{30} \cos \omega_2 \tau + \frac{w_{40}}{\omega_2} \sin \omega_2 \tau$$

となる。任意の角周波数に同期した軌道への追従を行うために $w_{10} = 0, w_{20} = a_0, s_1 = \omega/k, w_{30} = 0, w_{40} = a_0 \omega$ と

する. この軌道を生成する外部システムは

$$\omega' = S\omega, \omega(0) = \omega_0$$

ここで

$$S = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \end{bmatrix}, s_1 s_2 = -(\omega_1)^2, \omega_2 > 0$$

(x, y, z) を $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 追従させるには, フィードバック

$$u = -Kx + (\Gamma + K\Pi)\omega$$

を用いる, ここで Γ, Π はレギュレータ方程式

$$\begin{aligned} A\Pi - \Pi S + B\Gamma &= 0 \\ C\Pi + D &= 0 \end{aligned}$$

の解である. ここで,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

実際, 出力

$$z = Ce + D\omega$$

が 0 に収束する Π, Γ の解は

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} s_1 s_2 - 2s_2 - 2\sigma - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 s_2 + 2s_1 - 1 + \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2^2 * \sigma \end{bmatrix}$$

で与えられる.

3つの周波数に対して r を変化させたときのノルムのグラフを以下に示す.

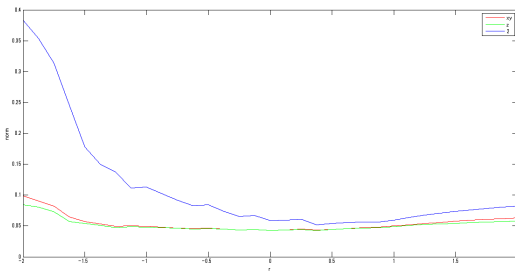


図5 ノルムの比較

表2 3つの周波数における最小のノルム

ω	ノルム
xy	4.29×10^{-2}
z	4.281×10^{-2}
2	5.16×10^{-2}

以上より, 出力レギュレーション理論を用いた移行制御において最小のノルムの周波数は $\omega = \omega_z$ であった. このときの軌道のシミュレーション結果を図7に示す.

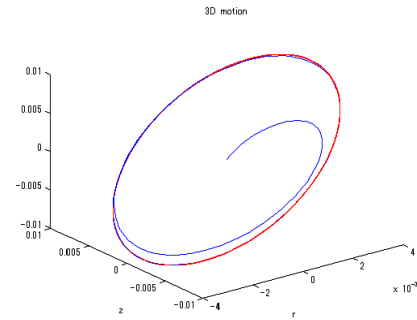


図6 出力レギュレーションによる移行制御 ($\omega = \omega_z$ $r=0.375$)

5 おわりに

本研究では, 地球-月系の円制限三体問題における L2 点近傍の小ハロー軌道を生成し, 宇宙機をその軌道に乗せて観測を行うために, 周波数制御と収束周期内に加える制御を用いて目標軌道を維持させ, L2 点から人工衛星を目標軌道へ移行させる制御を行った. そして, 3つの周波数に合わせた制御を行い, 制御にかかるノルムを比較した結果, 周波数を ω_{xy} に合わせたとき最小となった. また, 出力レギュレーション理論を用いた場合では, 周波数を $\omega = \omega_z$ に合わせた時, 最小となった. 更に, 移行制御では周波数制御よりも出力レギュレーション理論を使用することで, 燃料消費が抑えられることがわかった. その結果, 月の裏側を観測するなどのミッションを行うにあたり, 観測しやすかつ燃料消費も抑えられる制御方法を見つけることができた.

参考文献

- [1] "Formation Flying Near the Libration Points of CR3BP" Akira Ichikawa Mai Bando
- [2] ラグランジュ点近傍における小ハロー軌道の生成 伊藤凌平 小出和直 宮沢龍太郎 (南山大学 2013 年度卒業研究)
- [3] 円制限三体問題におけるハロー軌道への移行とその維持 廣村達哉 宇佐美元啓 (南山大学 2013 年度卒業研究)