

フレキシブルアームの最適サーボ制御

2010SE234 竹内秀和 2011SE016 趙洋

指導教員：陳幹

1 はじめに

近年、産業用のロボットなどに用いられるアームは高速化やエネルギー節減のためにますます軽量化されている。しかし、それに伴ってアームの剛性が低下し、振動やたわみが生じ正確に位置決めや制御ができなくなってしまうことがある。それは思わぬ事故や作業効率などの低下につながるため、それを抑制して、正確に制御する必要がある。本研究では、制御対象を一自由度のバネとダンパを使った単純モデル [1] に対し、サーボシステムを最適レギュレータ理論 [2] を用いた制御機を使い、外乱を除去しながら振動を抑制し、正確に目標値に収束されることを目的とする。また、重みと過度特性の関係を評価する実験を行い、関係を考察する。

2 モデリング

2.1 フレキシブルアームについて

アーム部分の厚みが薄い軽量化されたロボットアームの単純モデルである。そのために剛性が低くアームの振る舞いも振動的である。フレキシブルアームの操作量はアームに取り付けられたモーターの電圧である。制御するのはアームの先端の角度で、検出量はアームの根元の角度とアームのたわみ角度である。

2.2 単純化モデルによるモデリング

フレキシブルアームを制御するためモータとつながっている根元とアームの先端がバネとダンパによってつながっている単純化モデルを用いる。このモデルは、トルクはモータとつながっているハブの部分のみに働き先端はバネとダンパの力によって運動する。ハブに力を加え、ハブが θ だけ回転すると先端はそこからさらに α だけ回転する。よって先端の絶対的な角度は $\theta + \alpha$ となる。

ここで J_{eq} と J_{link} はそれぞれハブとリンクのモーメント、 K_{stiff} はバネの剛性（バネ定数）である。

ニュートンの運動方程式から

$$J_{link}\ddot{\alpha} = -K_{stiff}\alpha \quad (1)$$

減衰固有角周波数 ω_d と α の間には式 (2)[1] の関係が成立する。

$$\ddot{\alpha} = -\omega_d^2\alpha \quad (2)$$

式 (1)、式 (2) より、式 (3) が得られる。

$$K_{stiff} = \omega_d^2 J_{link} \quad (3)$$

また一様な棒の慣性モーメントの式から、式 (4) が得られる。

$$J_{link} = \frac{ML^2}{3} \quad (4)$$

2.3 オイラー・ラグランジュの運動方程式の適応

フレキシブルアームにオイラー・ラグランジュの運動方程式を適応するため、制御対象の位置エネルギー、運動エネルギー、損失エネルギーを求める。

・位置エネルギー

$$U = \frac{1}{2}K_{stiff}\alpha^2 \quad (5)$$

・運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{link}(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \quad (6)$$

・損失エネルギー

B_{eq} はハブの粘性減衰係数、 c はダンパの減衰定数である。

$$D = \frac{1}{2}B_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}c\dot{\alpha}^2 \quad (7)$$

ラグランジュを取ると

$$L = T - U = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{link}(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 - \frac{1}{2}K_{stiff}\alpha^2 \quad (8)$$

式 (8) より θ, α を一般化座標とし、そのうち θ に直接トルクがかかるため一般化力 τ をトルクとする。

式 (5),(6),(7) より、このモデルのオイラー・ラグランジュの運動方程式を得た。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \tau \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} = 0 \quad (10)$$

式変形により、式 (9),(10) は次式になる。

$$J_{eq}\ddot{\theta} + J_{link}(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) + B_{eq}\dot{\theta} = \tau \quad (11)$$

$$J_{link}(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) + K_{stiff}\alpha + c\dot{\alpha} = 0 \quad (12)$$

次にトルク源であるモータについて考える。モータの仕様書等から、電機子回路入力電圧を V 、電機子抵抗を R_m 、逆起電力定数を K_m 、ギア比を K_g 、モータのトルク定数を K_t 、モータ効率を η_m 、ギアボックス比を η_g とする。オームの法則より (13) 式が求められる。

$$\tau = \frac{\eta_g\eta_m K_t K_g (V - K_m K_g \dot{\theta})}{R_m} \quad (13)$$

式 (11),(12),(13) より、

$$\ddot{\theta} = \frac{K_{stiff}}{J_{eq}}\alpha - \frac{\eta_g\eta_m K_t K_g^2 K_m + B_{eq}R_m}{J_{eq}R_m}\dot{\theta}$$

表1 制御対象の物理パラメータ

記号	内容	値 [単位]
L	アーム長	0.43[m]
M	アーム質量	0.065[Kg]
K_t	モータトルク定数	0.00767[Nm/A]
K_m	モータ逆起電力定数	0.00767[V/(rad/s)]
R_m	モータ電気子抵抗	2.6[Ω]
η_g	ギアボックス効率	0.9
η_m	モータ効率	0.69
J_{eq}	ハブの慣性モーメント	0.002[kgm ²]
K_g	ギヤ比	70
B_{eq}	ハブの粘性摩擦係数	0.004[Nm/(rad/s)]
ω_d	減衰固有角振動数	20.73451

$$+ \frac{c}{J_{eq}} \dot{\alpha} + \frac{\eta_g \eta_m K_t K_g}{J_{eq} R_m} V \quad (14)$$

$$\ddot{\alpha} = - \frac{K_{stiff}(J_{eq} + J_{link})}{J_{eq} J_{link}} \alpha + \frac{\eta_g \eta_m K_t K_g^2 K_m + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} \dot{\theta} - \frac{c(J_{link} + J_{eq})}{J_{link} J_{eq}} \dot{\alpha} - \frac{\eta_g \eta_m K_t K_g}{J_{eq} R_m} V \quad (15)$$

ここで式の簡略化のため、 $\dot{\theta}$ の係数を次式で置き換える。

$$S = \frac{\eta_g \eta_m K_t K_g^2 K_m + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m}$$

式(14),(15)より、状態変数を $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$ 、制御入力を $u = V$ としたとき、状態空間表現

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

これは次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{stiff}}{J_{eq}} & -S & \frac{c}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{K_{stiff}(J_{eq} + J_{link})}{J_{eq} J_{link}} & S & -\frac{c(J_{link} + J_{eq})}{J_{link} J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\eta_g \eta_m K_t K_g}{J_{eq} R_m} \\ -\frac{\eta_g \eta_m K_t K_g}{J_{eq} R_m} \end{bmatrix} V \quad (16)$$

$$y = [1 \ 1 \ 0 \ 0] x$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{stiff}}{J_{eq}} & -S & \frac{c}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{K_{stiff}(J_{eq} + J_{link})}{J_{eq} J_{link}} & S & -\frac{c(J_{link} + J_{eq})}{J_{link} J_{eq}} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\eta_g \eta_m K_t K_g}{J_{eq} R_m} \\ -\frac{\eta_g \eta_m K_t K_g}{J_{eq} R_m} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 1 \ 0 \ 0] \quad (17)$$

2.4 パラメーター決定

仕様書等より制御対象のパラメーターはすでに判明している。

また減衰率は [4] より

$$\zeta = 0.951696 \quad (18)$$

減衰係数は c

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{J_{link} K_{stiff}}}$$

$$c = 2\zeta \sqrt{J_{link} K_{stiff}}$$

$$\cong 0.1579850645 \quad (19)$$

以上の数値を各式に代入して各種数値を求めた。

3 制御系設計

3.1 最適サーボシステム

本論文ではサーボシステムを最適レギュレーター理論 [2] により設計する最適サーボシステムを考える。

出力を目標値に定常偏差なく追従させるため前章で求めた状態方程式の拡大系の導出を行う。

出力 $y(t)$ と目標値 $r(t)$ の偏差を $e(t)$ として

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (20)$$

また、偏差 $e(t)$ を $[0, t]$ まで積分したものを $\omega(t)$ とする。

$$\omega(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (21)$$

拡大系の状態変数を $\tilde{x}_e(t) = [x(t) \ \omega(t)]^T$ としたときの $\tilde{x}(t) = x(t) - x_\infty$, $\tilde{\omega}(t) = \omega(t) - \omega_\infty$,

$\tilde{u}(t) = u(t) - u_\infty$ として (x_∞, u_∞ はそれぞれ $x(t), u(t)$ の定常値である)

拡大偏差系は

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A_e \tilde{x}_e(t) + B_e \tilde{u}(t) \\ e(t) = C_e \tilde{x}_e(t) \end{cases} \quad (22)$$

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_e = [-C \ 0]$$

となる。

次に重み行列 $Q_{11} = Q_{11}^T > 0$, $Q_{22} = Q_{22}^T > 0$, $R_e = R_e^T > 0$ に対して定義される評価関数

$$J = \int_0^\infty (\tilde{x}_e(t)^T Q_e \tilde{x}_e(t) + \tilde{u}(t)^T R_e \tilde{u}(t)) dt \quad (23)$$

$$Q_e = \begin{bmatrix} C^T Q_{11} C & O \\ O & Q_{22} \end{bmatrix}$$

を最小化するコントローラ

$$\tilde{u}(t) = K_e \tilde{x}_e(t), \quad K_e [K \ G] \quad (24)$$

を求める。これは最適レギュレータ理論からリカッチ方程式

$$P_e A_e + A_e^T P_e - P_e B_e R_e^{-1} B_e^T P_e + Q_e = O \quad (25)$$

の正定対称解

$$P_e = P_e^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (26)$$

を用いて解くことが出来る。

$$\begin{aligned} K_e = [K \quad G] &= -R_e^{-1} B_e^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \\ &= [-R_e^{-1} B_e^T P_{11} \quad -R_e^{-1} B_e^T P_{12}] \end{aligned} \quad (27)$$

この時、評価関数 (23) の最小値 J_{min} は、次式を計算することによって求められる。

$$J_{min} = \tilde{x}_e(0)^T P_e \tilde{x}_e(0) \quad (28)$$

また、最適サーボシステムを構成する積分型コントローラは [2] より

$$u(t) = Kx(t) + G \int_0^t e(t)dt + F_a r(t) + F_b x_0 \quad (29)$$

$$F_a = [-K + 2GP_{22}^{-1}P_{12}^T I] \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$F_b = -2GP_{22}^{-1}P_{12}^T \quad (31)$$

となっている。

4 シミュレーション

求めたフィードバックゲインをもとシミュレーションを行う

$$K = \begin{bmatrix} -8.9771 & 15.2797 & -0.8788 & 0.8793 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 16.3299 \end{bmatrix}$$

アームは開始位置から 45 度 ($\pi/4$) の場所で制止するように設定した。

5 実験と検証

5.1 実験

シミュレーションと同様の条件にて実験を行った。図 1 はシミュレーションと実験の結果を比較したグラフである。実験ではシミュレーションほど速くは収束しなかったがほぼ定常偏差なく収束していることがわかる。

5.2 検証

また、今回の研究では重みと過度特性の関係を実験にて検証した。 R を 1 に固定し重み Q_{11} と Q_{22} をそれぞれ増加させた場合どのような結果になるか実験し比較した。

図 2 は Q_{11} または Q_{22} とオーバーシュート量の、図 3 は Q_{11} または Q_{22} と整定時間との関係を表した図である。

各図から、 Q_{11} はオーバーシュート量、 Q_{22} は整定時間との関係性が高いことがわかる。

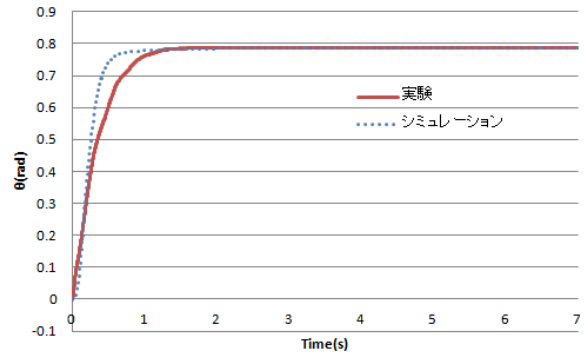
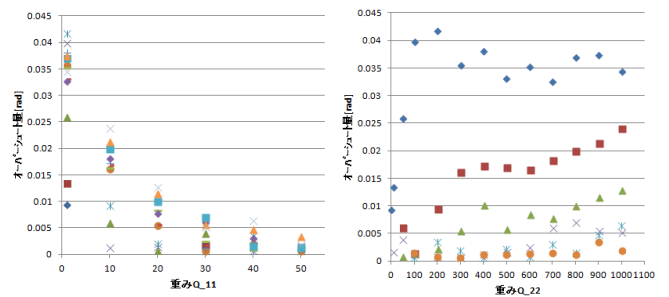


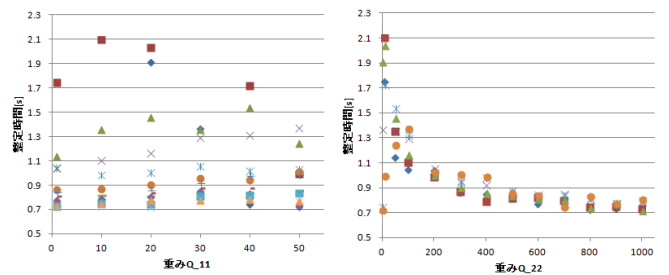
図 1 実験とシミュレーション結果の比較



[1] 重み Q_{11} との関係

[2] 重み Q_{22} との関係

図 2 重みとオーバーシュート量との関係



[1] 重み Q_{11} との関係

[2] 重み Q_{22} との関係

図 3 重みと整定時間との関係

Q_{11} は θ 及び α にかかる重みである。最初増加するとの量を減少させるが、今回は 50 あたりから振動をひどく増加させる結果となったために図は 50 までの結果となる。これは抑制をする力が大きすぎたために逆に振動を起こしてしまったものではないかと思われる。

Q_{22} は積分ゲインにかかる重みである。増加するにつれて応答速度を速める傾向となった。200 以降はそれほどはつきりした差は出ていない。

5.3 パレート最適解

本研究ではオーバーシュート量と整定時間を最小化するため、多目的最適解問題としてパレート最適解の概念に基づいて重みを選定する。図4は実験にて得られたオーバーシュート量と整定時間の散布図となる。

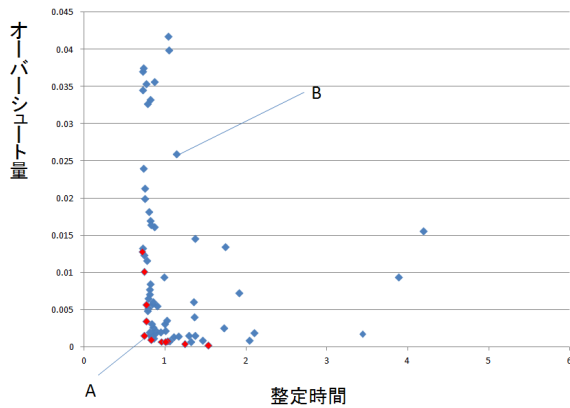


図4 パレート

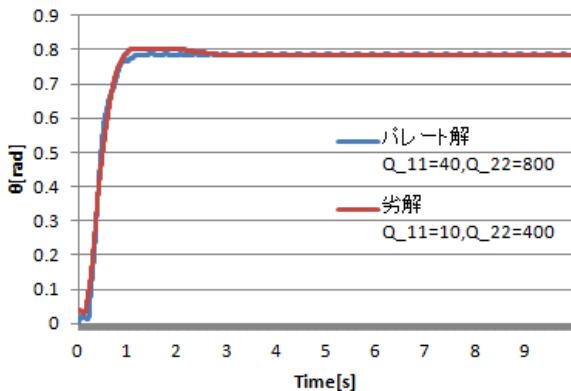


図5 実験結果

整定時間, オーバーシュートを最小化するパレート解であるAの点と, そうでない劣解のBの点を比較する。

図5はそのときの実験結果である。Aはパレート解であるためBと比べオーバーシュート量, 整定時間共に小さいことがわかる。しかしながら制御の途中でアームの振動が起きてしまっている。Bにはそのようなことは見受けられなかった。

今回はオーバーシュート量と整定時間についての検証を行ったが, 途中で発生する振動がする事態が起こってしまった。そこで振動の原因について, システムの極について調査した。

図6は Q_{11} を1から50, Q_{22} を1から1000へ増加させた際の各パターンシステムの極をまとめたグラフである。どの極においても常に実部の絶対値が虚部のものより大きい。そのため極は比較的安定であり, 極が振動の原因ではないことが分かった。

今回の振動はモデルの高次的な部分に原因がある可能性が考えられる。

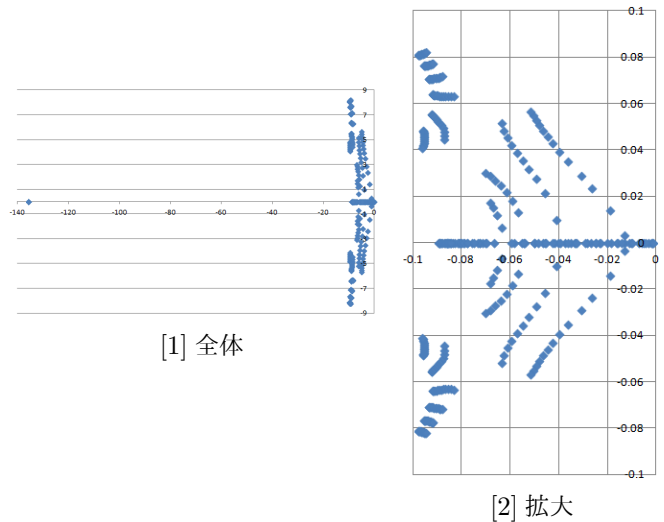


図6 極値

6 おわりに

- 本研究では
- ・アームの振動を考えたバネとダンパの減衰を考慮したモデルを用いて制御を行った。
 - ・最適サーボシステムを用いり, 目標値まで外乱を抑制しながら追従させた。
 - ・オーバーシュートと整定時間についてパレート最適の概念に基づいて重みの選定を行った。

参考文献

- [1] 鈴木宏和:『非線形PID制御によるフレキシブルアームの制振制御』, 南山大学数理情報学部 2005 年度修士論文。
- [2] 川田昌克:『MATLAB/Simulink による現代制御入門』. 森北出版,2011.
- [3] 川田昌克, 西岡勝博, 井上和夫:『MATLAB/Simulink によるわかりやすい制御工学』. 森北出版,2001.
- [4] 小島涼平:『フレキシブルアームの制御』, 南山大学情報理工学部 2014 年度卒業論文。