

三角領域上の二次元完全対称積分則

2010SE098 木村 綾乃

指導教員：杉浦 洋

1 はじめに

2次元領域上の関数の定積分を求めることは、数学における基本的な問題である。平面上の任意の多角形領域は三角領域に分割できる。したがって、三角領域上の数値積分法を作れば多角形領域上の積分ができる。任意の単連結有界領域上の積分は、領域を多角形領域で近似する。または、変数変換で多角形に変換することにより、三角領域上の積分に帰着する。

本論文では、適応型積分法 [1] を考える。適応型積分法のアルゴリズムは「精度が低いと判定された小三角形を2分する」という操作を繰り返して、必要な精度を達成する。このような数値積分法を用いる効率の良い積分公式を設計することが、本論文の目標である。

2 三角形領域上の積分則

2.1 数値積分則の設計

xy -平面上の3点 $\alpha = (0, 0)$, $\beta = (1, 0)$, $\gamma = (0, 1)$ を頂点とする三角形領域 Δ を基本三角領域と呼ぶ。 n 個の標本点

$$\pi_i = (\xi_i, \eta_i) \in \Delta \quad (1 \leq i \leq n)$$

と重み ρ_i ($1 \leq i \leq n$) による積分公式を特別に

$$I_n f = \sum_{i=1}^n \rho_i f(\pi_i)$$

と書き、基本公式と言う。これを変数変換により任意の三角領域の近似積分に用いる。点 a, b, c を頂点とする三角領域 $D = D(a, b, c)$ の面積を S とする。 Δ から D へのアフィン変換 $\varphi: q = s\alpha + t\beta + u\gamma \rightarrow p = sa + tb + uc$ により、

$$Q(D)f = \iint_D f(p) dx dy = 2S \int_{\Delta} f(\varphi(q)) dt du.$$

この右辺に積分則 I_n を用いて積分公式

$$Q_n(D)f = 2S \sum_{i=1}^n \rho_i f(\varphi(\xi_i, \eta_i)) \cong Q(D)f \quad (1)$$

を得る。アフィン変換で、 x, y の k 次多項式は t, u の k 次多項式に変換されるから、 I_n が s 次公式なら $Q_n(D)$ も s 次公式である。

3 FS(Fully Symmetric : 完全対称) 集合

三角領域 D をそれ自身に移すアフィン変換は重心座標の置換であり、その数は頂点を順列の数と等しく6である。点 $p \in D$ の重心座標を (x, y, z) とし、その成分を置換した座標全体を

$$\langle p \rangle = \langle x, y, z \rangle$$

$$= \{(x, y, z), (x, z, y), (y, z, x), (y, z, x), (z, x, y), (z, y, x)\}$$
 印の終点が再び $Q_n(D)$ の標本アトムであることである。

と書き、アトムと呼ぶ。 D の部分集合 $A \subset D$ がこの6つのアフィン変換で不変なとき、 A は FS(Fully Symmetric: 完全対称) 集合であると言う。 A が FS 集合なら、 $p \in A \Rightarrow \langle p \rangle \subset A$ である。FS 集合はアトムを単位とするので、同一標本点数の一般の公式と比べ、パラメーター数は少なく、設計も実装も容易となる。式 (2) の積分公式 $Q_n(D)$ は、一般に基本三角領域 Δ から三角領域 D へ、アフィン変換 φ に依存せず一意に定まる。アトムが FS 公式の標本点からなるとき、そのアトムを公式の標本アトムという。

4 再利用性

三角領域 $D = D(a, b, c)$ 上での近似積分 $Q_n(D)f$ の精度が悪いときは、 D の頂点と重心 g を通る直線で小三角形 D_0 と D_1 に2分し、より、精度の高い近似積分

$$Q_n(D_0)f + Q_n(D_1)f \cong Q(D)f$$

を得る。この領域分割を D_0, D_1 以下にも再帰的に繰り返す。十分精度の高い近似積分値が得られる。このような領域分割を再帰的に繰り返す近似積分法を適用型積分則という。アトム $\langle p \rangle$ が $Q_n(D)$ の標本アトムであるとする。 $\langle p \rangle$ の全ての点が $Q_n(D_0)$ か $Q_n(D_1)$ の標本点になっていれば、 $\langle p \rangle$ は再利用可能であるという。 $Q_n(D)$ の全ての標本点が $Q_n(D_0)$, $Q_n(D_1)$ で再利用可能であるとき $Q_n(D)$ を R 公式という。また、その標本点集合を R 集合という。R 公式は標本点上で一度計算した関数値が、領域分割の過程で再利用できるため効率的である。 $D = D(a, b, c)$ の頂点 a を選び、 a と g を通る直線で D を分割すると小三角形 $D_1 = D(a, b, d)$ と $D_2 = D(a, d, c)$ ができる。ここで、 $d = \frac{b+c}{2}$ は点 b, c の中点である。 $Q_n(D)$ の標本点 p の重心座標を (x, y, z) とすると

$$\begin{aligned} p &= xa + yb + zc \\ &= xa + (y-z)b + 2z \frac{b+c}{2} \\ &= xa + (y-z)b + 2zd. \end{aligned}$$

ゆえに p の D_1 における重心座標は $(x, y-z, 2z)$ である。 $y-z \geq 0$ のとき $p \in D_1$ である。さらに、 $(x, y-z, 2z)$ が $Q_n(D_1)$ の標本点の重心座標なら、 p は $Q_n(D_1)$ で再利用される。同様に $(x, 2y, z-y)$ は p の D_2 における重心座標である。 $z-y \geq 0$ のとき、 $p \in D_2$ である。さらに、 $(x, 2y, z-y)$ が $Q_n(D_2)$ の標本点の重心座標なら p は $Q_n(D_2)$ で再利用される。以上により、 $Q_n(D)$ の標本点 $\langle p \rangle = \langle x, y, z \rangle$ ($x \leq y \leq z$) が再利用可能であるための必要十分条件は、三つのアトム $\langle p_0 \rangle = \langle 2x, y-x, z \rangle$, $\langle p_1 \rangle = \langle 2x, y, z-x \rangle$, $\langle p_2 \rangle = \langle x, 2y, z-y \rangle$ が $Q_n(D)$ の標本アトムであることである。 $Q_n(D)$ が R 公式であるための必要十分条件は、 $Q_n(D)$ の標本アトム $\langle p \rangle$ から出る三本の矢

5 アトム親子グラフとギルドグラフ

アトム集合 X にあらわれるすべての関係 $p \rightarrow q (p, q \in X)$ を矢印で結んだものを X の親子グラフと呼び $G(X)$ と書く。 p は q の子であり、 q は p の親である。 R 集合を系統的に作り出す方法として、 それ自身 R 集合である原子集合 X の親子グラフ $G(X)$ を作り、 その部分グラフ $G(P), P \subset X$ の再利用性を判定することである。 X としては自然数 n に対して

$$X_n = \{ \langle \frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \rangle : i+j+k=n, 0 \leq i \leq j \leq k \}$$

が考えられる。 $\langle \frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \rangle$ に対し再利用関係をもつ $\langle \frac{2i}{n}, \frac{j-i}{n}, \frac{k}{n} \rangle, \langle \frac{2i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k-i}{n} \rangle, \langle \frac{i}{n}, \frac{2j}{n}, \frac{k-i}{n} \rangle$ はすべて X_n の元であるから X_n は R 集合である。 この節では、 分母が $n=30$ 以下の全てのアトムからなる集合を A_{30} とし、 その親子グラフ $G(A_{30})$ について考察する。 野田 [3] は、 手作業の限界から、 $n=20$ であった。 総アトム数は 788 である。 n が既約共通分母となっているアトムからなる部分集合

$$Y_n = \{ \langle \frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \rangle : \text{GCD}(i, j, k, n) = 1 \} \subset X_n$$

を「 n 系」と呼ぶ。 GCD は最大公約数である。 明らかに $p \in Y_n, p \rightarrow q$ なら

$$p \in \begin{cases} Y_n & , n \text{ は奇数} \\ Y_n \cup Y_{\frac{n}{2}} & , n \text{ は偶数} \end{cases}$$

である。 ゆえに、 $G(A_{30})$ は 30 以下のすべての奇数 K に関する部分グラフ

$$G(Z_K), Z_K = Y_K \cup Y_{2K} \cup \dots \cup Y_{LK}, LK \leq 30 < 2LK$$

に分割される。 このアトム集合 Z_K を「 K 系統」と呼ぶ。 $G(Z_K)$ において、 2つのアトム p, q が双方向の有向路で結ばれるとき、 兄弟という。 特別に p 自身は p と兄弟であるとする。 p と兄弟アトム全体 $K(p)$ を p のギルドと言う。 p が R 集合 A に含まれるなら $K(p) \subset A$ であるので、 R 集合はギルドを単位に構成される。 ギルド間にもアトムの親子関係を継承した親子関係がある。 これによりギルドをノードとするギルドグラフが得られる。 $\{0, 0, 1\}$ のみからなるギルドはそれ自身 R 集合である。 このようなギルドを根ギルドという。

6 R 集合構成アルゴリズム

まず、 各系統でギルドグラフに基づき、 点数 40 以下の R 集合の表を作る。 ギルドグラフは Mathematica のグラフ処理機能を用いて作成、 描画した [2]。 各系統から R 集合を 1 つずつ選んで和集合をとると、 A_{30} の R 集合が得られる。 ただし、 各系統は空集合を R 集合として含むものとする。

本論文では、 その中から 40 点以下の R 集合をすべて構成した。 その数は 1013 個であった。 これらすべてに対し、 積分則の重みを計算し、 FSR 則を作った。 そして、 次数 s は達成可能な最大次数を選んだ。

6.1 優良公式の選抜

作成した FSR 則について分割コスト C と誤差係数 E を計算した。 領域分割 1 回あたり C 点の標本点が追加されるとき、 E を公式の分割コストという。

三角領域 D 上での積分に用いる標本点集合を P, D を二等分した領域 D_1, D_2 上での積分に用いる標本点集合をそれぞれ P_1, P_2 とすると、 R 公式では $P_1 \cup P_2 \supset P$ であり、 P の点はすべて P_1, P_2 で再利用される。 そして、 再利用された点以外の点の数

$$C = |(P_1 \cup P_2) - P|$$

が分割コストである。 s 次則は正確に積分できない $s+1$ 次多項式をもつ。 基本領域 Δ における単項式の積分誤差を

$$E_{k,l} = Q_n(x^k y^l) - \iint_D x^k y^l dx dy (k, l \geq 0)$$

とするとき、 $s+1$ 次単項式に対する積分誤差の絶対値の総和

$$E = \sum_{k+l=s+1, k \geq 0, l \geq 0} |E_{k,l}|$$

を s 次則 Q_n の誤差係数と呼ぶ。 我々は、 構成した 1013 個の FSR 則から上記の s, C, E を基準にして優良公式を選抜する。 s は大きいほど良く、 C と E は小さいほど良い。

ここでは、 全リストから劣悪公式を取り除くことで、 それを達成する。 劣悪公式とは、 s, C, E のいずれにおいてもその公式より優れた公式が存在する公式のことである。

7 おわりに

これまで、 野田 [3] の FMR 集合に関するグラフ理論を学んできた。 野田は、 その理論に基づき、 手で親子グラフを描き、 重心座標の分母が 20 以下の標本点をもつすべての FMR 集合を列挙した。

今回は、 親子グラフをコンピュータ上に実現し、 ギルドを極大強連結集合として抽出し、 FMR 集合の列挙を自動化することを目標とした。 その結果 26 個の優良 FMR 公式を得た。 積分次数は最低 1 次最高 8 次で、 様々な精度要求に応じることができる。

8 参考文献

- [1] A.Geniz and R.Cools:An Adaptive Numerical Cubature Algorithm for Simplices, ACM Transactions on Mathematical Software, vol.29, no.3, pp.297-308(2003).
- [2] 古田純也, 長方形領域の再利用可能積分公式 南山大学情報理工学部 情報システム数理学科 2012 年度卒業論文, 数値計算の基礎と応用
- [3] 野田恭代, 二次元完全対称積分則の設計, 南山大学数理情報学部数理科学科 2011 年度卒業論文, 数値計算の基礎と応用